泛复变函数及其在数学与物理中的应用

QI ZHAI SHU XUE YU WU LI ZHONG DE YING YONG

XONG XI JIN



熊锡金　著

东北师范大学出版社

泛复变函数及其在数学与物理中的应用

熊锡金 著

东北师范大学出版社

泛复变函数及其在
数学与物理中的应用
Fanfubian Hanshu ji qi zai
shuxue yu wuli zhong de yingyong

熊锡金 著

东北师范大学出版社出版 吉林省新华书店发行
（长春市斯大林大街110号） 长春市第六印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：6.6875 字数：155千
1988年4月第1版 1988年4月第1次印刷
印数：00001—1 0000册

ISBN 7-5602-0070-2/O·15

统一书号：13334·30 定价：（精装）2.35元 （平装）1.30元

序

:chael Atiyah曾经说过："G. Mackey有次对我说的话，我认为是很正确的。在数学的某个领域中，重要的东西常常不是技术上最困难的即最难证的东西，而常常是较为初等的部分。因为这些部分与其他领域、分支的相互作用最广泛即影响面最大。"

古典解析函数在高维的推广（当然这里指的不仅仅是变量的多寡，而是自变数所在域的扩充）以及数系的发展一直是数理科学家以至整整十几代科技精英奋斗的目标。对这本书来说，似乎完成了最基础的一步。而它在技术上并未遇到十分的困难。也许这一简明的创新，可以符合 Atiyah 的判断。

数与量是横贯万事万物的概念，它的认识与发展一直是人类智慧的象征，它既是一切科学的基础，又是科学最高峰上的霞光。从泛系理论来看，具有较多运算与相对丰富性质的数学结构、广义系统或泛结构都可看成广义的数或量。由自然数族出发，逐步利用泛积（直积的商缩影）这一泛系工具就可引出整数、有理数、无理数、实数、非标准数、复数、泛复数、四元数、超复数、区间数、模糊数、布尔代数等数学结构以及其他通用的数学结构。但是每种广义数或量的具体研究与理论系统创建却是极其艰苦的工作。熊锡金同志的泛复变函数理论对泛复数进行了开拓性的研究，既别具特色而独创地发展了泛系理论赋范环微积的新方向，同时又

是各种超复变函数的推广，具有我们中国的风韵，就其内容和作用来看，它将成为数学中一种新的分支。

从熊锡金最早的论文开始，我一直以极其欣喜而羡慕的心情来看待有关工作。熊锡金同志做了我多年想做而又自愧力弱而难为的研究，许多结果比我想象的要简括而优美，发展下去，不但会有许多用途，还会成为一种新的流派。

熊锡金同志在这个新领域中已经奋战二十多年了。泛复变函数不仅在函数论上得到了许多有趣的定理与公式，而且已经和一些数学、物理中的重要问题结下了亲缘，诸如数学中的数域的广域扩张，代数方程根的新数量，偏微分方程中高阶与低阶的关系、函数论解法、不同型的统一边值问题、“通解”概念等，方程与各种域中等式扩展等概念，在物理中则涉及经典的、相对论的及一种新力学的统一，奇异电磁场的描述，空间流场的直接处理，基本粒子与时空结构等等。本书对上述极为重要的一些问题已做出了很有意义的结果，作出了一种开拓性的引导。它与多种领域与专题的关联，可能导致泛复变函数这一新方向的蓬勃发展。

这本专著篇幅虽小，但它内容的基础性与广泛性，它深入浅出的写法，可能为未来大学生的必修课程准备了一本好的教科书。书中入门性的工作，可以为现在大学生、研究生挑选研究课题时作参考。而其中的一些方法也可作为专业数理工作者解决有关问题的一种有力工具。

现代科学技术发展的主流是整体化趋势与辩证综合，是多专题的跨域结合与相互渗透。泛复变函数理论把古典分析、泛函分析、数系推广、数学物理与泛系方法具体结合起来，是一种可贵而引人入胜的探索、主动迎合了学科发展新的趋势，已经得到钱伟长、L.Bers 等教授和美国泛系研究

组的好评和关注。现在能集结出一专著，有利于这一新兴方向的发展。我深信，本书内容若能纳入教科书中，为一般数理科学工作者及工程技术人员所掌握，它的重要作用将随着时间的推移而会日益加速地显示出来。

吴学谋

1986年11月8日

目　　录

第一章　数的扩充

第二章　泛复变函数

第三章　应　用

第一章　数的扩充

下一个重要的代数创造由哈密尔顿所创始。他揭开了全新的领域，打破了对于“数”所必须遵循的规则的古老信念。
——M·克莱因

从实数到具有良好性质的复数，人们陶醉于自己的胜利，但在欢呼之余，邦德列雅金拓扑域定理象在泼水节中洒出的一大盆水，既是祝福又使大家冷静下来。他说，不会再有比复数更大而和它性质完全相同的集合。的确是这样，但不必沮丧，平行的路也许是可以找到的。

§1　平面泛复数

泛复数的严格定义将在后面叙述，这里让我们先获得一些感性认识。

定义1　实数域可以添加三种不同的非实域中的元素——虚单位 i，j，k，它们分别满足下面等式及构成三种复数，统称为**平面泛复数**或称为**圆锥复数**。

椭圆数　$a=\alpha+\beta i$　满足　$i^2+1=0$　简记为　C
抛物数　$a=\alpha+\beta k$　满足　$k^2=0$　简记为　P　（1）
双曲数　$a=\alpha+\beta j$　满足　$j^2-1=0$　简记为　H

其中α、β为实数，称α为a的**实部**，记为$R_e a=\alpha$，称β为a的

虚部，记为$I_m a=\beta$. 两圆锥复数相等是指实部虚部分别相等.

读者也许会问，j不就是± 1吗? k不就是0吗? 不是的。因为i、j、k都不是实域中的元素。即1和j以及1和k在实域上是线性无关的。也就是在实数中设有不全为零的元素α、β，使得$\alpha\cdot 1+\beta\cdot j=0$或$\alpha\cdot 1+\beta\cdot k=0$。而$\pm 1$和0则不然。

定义2 称i、k、j分别为椭园、抛物、双曲虚单位。用ω代替i、k、j中任一虚单位，与定义1吻合的平面复数运算是：

加减法：

$$(\alpha+\beta\omega)\pm(\gamma+\delta\omega)=(\alpha\pm\gamma)+(\beta\pm\delta)\omega$$

乘法：

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+\beta i)\cdot(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i \\
&(\alpha+\beta k)\cdot(\gamma+\delta k)=\alpha\gamma+(\alpha\delta+\beta\gamma)k \qquad (2)\\
&(\alpha+\beta j)\cdot(\gamma+\delta j)=(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)j
\end{aligned}
$$

定义3 $a=\alpha+\beta\omega$的共轭元为$\bar{a}=\alpha-\beta\omega$。易知$a\bar{a}$为实数。对两个非零泛复数$a$和$b$，如果$a\cdot b=0$，则称$a$和$b$为共轭或相伴零因子。

显然，椭圆复数C中没有零因子。而双曲复数H中的共轭零因子是$\lambda(1+j)$及$\mu(1-j)$。抛物复数P中的共轭零因子是λk与μk。

定义4 除法

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i \qquad (\gamma\text{、}\delta\text{不全为}0)\\
&\frac{\alpha+\beta k}{\gamma+\delta k}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}k \qquad (\gamma\neq 0) \qquad (3)\\
&\frac{\alpha+\beta j}{\gamma+\delta j}=\frac{\alpha\gamma-\beta\delta}{\gamma^2-\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2-\delta^2}j \qquad (\gamma\neq\pm\delta)
\end{aligned}
$$

易知，零和零因子不能作除数。

如果引进新的算符圆加$\oplus$规定：

$$\oplus=\begin{cases}+ & (C)\\ 0\times & (P)\\ - & (H)\end{cases}$$

乘除定义也可统一为：

$$(\alpha+\beta\omega)(\gamma+\delta\omega)=(\alpha\gamma-\oplus\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)\omega$$

$$\frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}=\frac{\alpha\gamma\oplus\beta\delta}{\gamma^2\oplus\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2\oplus\delta^2}\omega$$

它们虚单位满足的条件（1）也可统一成：

$$\omega^2\oplus 1=0$$

定义 5 如果$ab=1$，则称ab互为**逆元**。

显然，非零和非零因子a均有逆元：

$$a^{-1}=\frac{1}{a}=\frac{\bar{a}}{a\bar{a}}$$

这种元素称为**正则元**。

圆锥复数的开方运算可能会有一定的条件限制，对椭圆复数n次方程有n个根，其它复数就不一定了。从例 2 可看到双曲复数中，平方根有四个或没有，如果双曲复数平方根存在，则这四个方根在不同的区限。

例1 求圆锥复数$a=1+3\omega$的逆元

解 因 $\bar{a}=1-3\omega$

所以 $a^{-1}=\dfrac{\bar{a}}{a\bar{a}}=\dfrac{1-3\omega}{(1+3\omega)(1-3\omega)}$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i & \omega\in C\\ 1-3k & \omega\in P\\ -\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8}i & \omega\in H\end{cases}$$

例2 求双曲复数$\alpha+\beta j$的平方根。

解 设$\sqrt{\alpha+\beta j}=x+yj$，则$(x+yj)^2=\alpha+\beta j$

因此 $$x^2+y^2=\alpha,\ 2xy=\beta \tag{4}$$

当$\alpha\geqslant|\beta|$时，

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(\pm\sqrt{\alpha+\beta}\pm\sqrt{\alpha-\beta}) \\ y=\dfrac{1}{2}(\pm\sqrt{\alpha+\beta}\mp\sqrt{\alpha-\beta}) \end{cases}$$

符号顺序由x定。

当$\alpha<|\beta|$时，方程 4 无解。即双曲复数无平方根。

例3 在 C、P、H中分别求下列方程的解。

$$z^4-4z^2=0$$

解 原方程变形为

$$z^2(z^2-4)=0$$

在C中 $z=0$，$z=\pm 2$

在P中 $z=0$，$z=\pm 2$，$z=\lambda k$

在H中 $z=0$，$z=\pm 2$，$z=\pm 2j$

例4 试用矩阵定义双曲复数H。

解 令 $$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad J=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

由于 $$IJ=JI=J,\ I^2=I,\ J^2=I.$$

因此它的运算规律全同于双曲数基 1 和j。而I、J在R上又线性无关，因此$A=\alpha I+\beta J$构成一种数，$\alpha\in R$，$\beta\in R$。它全同于双曲数。

研究课题1 抛物数 P与双曲数H中代数方程根的规律.

§2 圆锥复数的几何意义

三种圆锥复数可用平面直角坐标系中的点和向量来对应。这三种平面分别称为**椭圆平面**（C）、**抛物平面**（P）、**双曲平面**（H）。

定义6 设$a=\alpha+\beta\omega$为平面泛复数，非负实数$|a|_M$叫做a的**模**：

$$|a|_M=\sqrt{|a\cdot\bar{a}|}=\begin{cases}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} & a\in C\\ |\alpha| & a\in P\\ \sqrt{|\alpha^2-\beta^2|} & a\in H\end{cases}$$

或简记为

$$|a|_M=\sqrt{|\alpha^2\oplus\beta^2|}$$

当$|a|_M=0$时，称a为**零模数**也叫做**奇异元**。显然a为零模数的充要条件是a为零或零因子。

全体零模数的集合记为Z_0，它的形状如图1。即在C平面上是原点（$x=y=0$）；P平面上是纵轴（$x=0$）；H平面是垂直的两直线（$x\pm y=0$）。

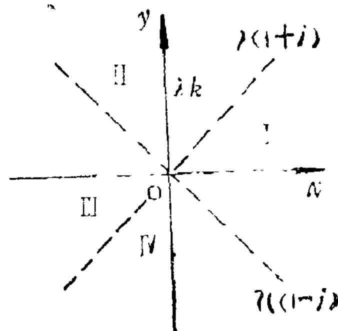


图 1

椭圆平面的零模点是孤立的，而抛物与双曲平面的零模点则是连续的。后者将抛物平面分成左、右两区限，将双曲平面分成四个区限。我们把P平面右区限，H平面的第I区限叫做主区限。

关于平面泛复数的模可以得到以下一些规律：

定理1 ①$|ab|_M=|a|_M|b|_M$.

②如果平面泛复数a、b在同一区限，则

$$|a+b|_M\leqslant|a|_M+|b|_M \quad a、b\in C$$
$$|a+b|_M=|a|_M+|b|_M \quad a、b\in P \qquad (6)$$
$$|a+b|_M\geqslant|a|_M+|b|_M \quad a、b\in H$$

在三种平面上，a、b的拟距离定义为$d=|a-b|_M$。那么，按拟距离定义，仅有椭圆平面是欧氏平面，而另两则不然。

也可定义平面复数的拟数积如下：

$C \qquad [a_1a_2]=|\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2|$

$P \qquad [a_1a_2]=|\alpha_1\alpha_2|$

$H \qquad [a_1a_2]=|\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2|$

在C、P、H平面建立直角坐标后，以原点为中心，通过主区限中圆锥复数$a=\alpha+\beta\omega$的对应点$A(\alpha,\beta)$分别在C平面上作圆，在P平面上作与y轴平行的直线，在H平面上作等轴双曲线，得图2

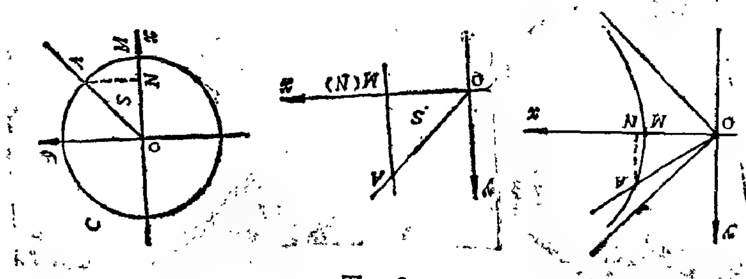


图 2

曲边三角形OAM在三种平面中都起作十分重要的作用。因为$ON=\alpha$，$AN=\beta$。所以OM在C、P、H中分别为$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，α，$\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$，即可写成$OM=|a|_M=r$。

设曲边三角形OAM的面积为S，则称比值$\theta=\frac{2S}{\gamma^2}$为$a$的幅角。幅角在椭圆平面$C$上就是角$AOM$的值，而在抛物及双曲平面上只能看成一个比值，是用（r，θ）来确定A的一个坐标，不能是欧氏角AOM的数值。后面将看出它是不同力学系统中与速度有关的量。它的数值下节中将叙述。

例1 设平面泛复数$z=x+y\omega$，试求在C、P、H平面上$|x+y\omega|_M<1$分别是什么区域。

解 $|x+y\omega|_M<1$在三种平面上为

C：$x^2+y^2<1$，　单位圆内。

P：$|x|<1$，　两直线$x=\pm1$间带形域。

H：$|x^2-y^2|<1$，四支双曲线$x^2-y^2=\pm1$间星形域。

例2 复式"圆"方程$az\bar{z}+bz+\overline{bz}+c=0$，$I_m a=I_m c=0$在三种平面上的图形是什么？

解 令$b=\beta+\gamma\omega$原方程变为

C：$a(x^2+y^2)+2(\beta x-\gamma y)+c=0$　圆

P：$ax^2+2\beta x+c=0$　两直线

H：$a(x^2-y^2)+2(\beta x+\gamma y)+c=0$　双曲线

研究课题2 P和H平面上的零因子没有幅角θ，由此能否产生不同性质的多个∞概念？其性质如何？

§3 圆锥复数的指数函数式

我们先用幂级数来定义指数函数：

$$e^{\theta\omega}=1+\theta\omega+\frac{(\theta\omega)^2}{2!}+\frac{(\theta\omega)^3}{3!}+\cdots+\frac{(\theta\omega)^n}{n!}+\cdots$$

$$=\begin{cases}\cos\theta+i\sin\theta & \omega=i\in C\\ 1+k\theta & \omega=k\in P\\ \mathrm{ch}\theta+j\mathrm{sh}\theta & \omega=j\in H\end{cases}$$

可知它也满足一般指数函数的运算规律，如$e^p\cdot e^q=e^{p+q}$，$e^p/e^q=e^{p-q}$，$(e^p)^q=e^{pq}$等。

设圆锥复数$a=\alpha+\beta\omega$在主区限中，则它可以写成指数形式，也称为**广义欧拉公式**：

$$a=\alpha+\beta\omega=re^{\theta\omega}=\begin{cases}r(\cos\theta+i\sin\theta) & \omega\in C\\ r(1+k\theta) & \omega\in P\\ r(\mathrm{ch}\theta+j\mathrm{sh}\theta) & \omega\in H\end{cases} \quad (7)$$

对照实部和虚部有

$$\alpha=\begin{cases}r\cos\theta\\ r\\ r\mathrm{ch}\theta\end{cases} \qquad \beta=\begin{cases}r\sin\theta & (C)\\ r\theta & (P)\\ r\mathrm{sh}\theta & (H)\end{cases}$$

将α、β平方圆加后可得：

$$r=\sqrt{|\alpha^2\oplus\beta^2|}=|a|_M$$

将α、β相比后可得：

$$\theta=\begin{cases}\mathrm{arctg}\dfrac{\beta}{\alpha} & (C)\\ \dfrac{\beta}{\alpha} & (P)\\ \mathrm{arth}\dfrac{\beta}{\alpha} & (H)\end{cases}$$

其它区限也有类似结果，但符号有区别。

指数式便于平面复数进行乘、除、乘方，开方的运算，即对于$a=re^{\theta\omega}$，$b=r'e^{\theta'\omega}$有

$$ab=rr'e^{(\theta'+\theta)\omega}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{r}{r'}e^{(\theta-\theta')\omega}$$

因而也有广义棣莫弗公式

$$a^n=(re^{\theta\omega})^n=r^n e^{n\theta\omega}$$

$$=\begin{cases} r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) & \omega\in C \\ r^n(1+kn\theta) & \omega\in P \\ r^n(\mathrm{ch}\,n\theta+j\,\mathrm{sh}\,n\theta) & \omega\in H \end{cases} \qquad (8)$$

指数 n 也可推广到分数与无理数，但此时可能出现多值的结果。

例1 计算$\sqrt[4]{1+8k}$、及$\sqrt[3]{5+4j}$。

解 ① $\sqrt[4]{1+8k}=\sqrt[4]{1}\left(1+\frac{8}{4}k\right)=\pm(1+2k)$。

② $\sqrt[3]{5+4j}=\sqrt[3]{3}\left(\mathrm{ch\,arth}\frac{4}{5}+j\,\mathrm{sh\,arth}\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=\sqrt[3]{3}\left(\mathrm{ch}\frac{1}{3}\mathrm{arth}\frac{4}{5}+j\,\mathrm{sh}\frac{1}{3}\mathrm{arth}\frac{4}{5}\right).$$

例2 试证明双曲复数指数函数式中模长与幅角和其几何意义中的模长、幅角在主区限内是一致的。

证明 由 $a=\alpha+\beta j=r(\mathrm{ch}\theta+j\mathrm{sh}\theta)$

可得 $r=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$，$\theta=\mathrm{arth}\frac{\beta}{\alpha}$.

在几何表示中，由于A点坐标为（α，β），则等轴双曲线方程为（图2）

$$x^2-y^2=\alpha^2-\beta^2$$

因此， $r=OM=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$

经计算，曲边三角形AOM的面积为

$$S=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)\mathrm{arth}\frac{\beta}{\alpha}$$

所以有
$$\theta=\frac{2S}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{2S}{r^2}=\mathrm{arth}\frac{\beta}{\alpha}.$$

在C、P、H平面上的几何学，分别叫做欧几里得、伽里略、闵可夫斯基几何。可参看文献48。

C、P、H平面上的"圆"如果按$|z-a|_M=r$来定义，就是圆、两直线、双曲线；如果按立在线段上等角顶点的轨迹来定义，就是圆、抛物线、双曲线。

研究课题3　在三种平面上用$|z-a|_M$建立拟距离与拟邻域后，将对拓扑、几何与分析学产生新结果，这些在物理中也将有体现。

习　题　一

1　计算

① $(2+3j)(2-j)$　　② $(1+2k)^4$

③ $(2+3j)^3$　　④ $\frac{2+3k}{3-k}$

⑤ $(2-j)^{-1}$　　⑥ $\sqrt{5+3j}$

2　试求代数方程分别在C、P、H中的解

$$z^6-z^2=0$$

3　试用圆加号⊕表示$(\alpha+\beta\omega)^{-1}$.

4　在C、P、H中，下列点集图形是什么?

① $Im(z+1)>0$　　② $Re z^2=0$

5　试证$|a|_M=|\overline{a}|_M=|a^{-1}|_M^{-1}$.

6　在C、P、H中，$|x+y\omega|_M=5$分别表示什么曲线?

7　试求$\sqrt{\alpha+\beta k}$之值。由此讨论P中方根的规律.

8　求$a=5+4\omega$与$b=2-\omega$的拟数积$[ab]$.

9．试证H中零因子的平方根仍是零因子．你能否找出它们的乘方与开方规律？

10 试用数对的形式定义P和H．

11 试用矩阵定义C和P．

12 求下列平面复数的指数函数式。

① $12+5i$ ② $1+3k$

③ $10-6j$ ④ $2+\omega$

13 试证明，在主区限中，抛物复数几何意义中的模长、幅角即指数式中的模长，幅角．

14 利用指数函数式求

① $\sqrt[5]{1+10k}$ ② $\sqrt[3]{13-5j}$

15 圆锥复数指数式与区限有关，试找出其规律

16 证明定理1．

17 设 $z=x+y\omega=\cos t+\omega\sin t$，$w=z^2=u+v\omega$ 问 z 在三种 (x,y) 平面，w在三种 (u,v) 平面分别表示什么曲线。

18 双曲平面 H 上，以 (r,θ) 为变量形式的坐标称为双曲坐标。试证在主区限直角坐标变量写成

$$x=r\mathrm{ch}\theta \qquad y=r\mathrm{sh}\theta$$

19 若

$$x+\frac{1}{x}=2\mathrm{ch}\theta$$

试证

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\mathrm{ch}\,n\theta$$

20 利用广义棣莫弗公式求$\mathrm{ch}\,n\theta$和$\mathrm{sh}\,n\theta$的展开式．

21 证明

$$1+\mathrm{ch}\theta+\mathrm{ch}2\theta+\cdots+\mathrm{ch}\,n\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\mathrm{ch}\,n\theta-\mathrm{ch}(n+1)\theta}{1-\mathrm{ch}\theta}\right]$$

§4 可易三元数

平面上的点有不同形式的数对应。三度空间和更高维的

空间有没有一些具有良好性质的数对应呢？以往有一些不具备乘法交换律性质的数对应的空间．而另一些只是少数极特殊的偶数维空间．陈省身先生曾经指出“奇维流形至今还是神秘的”．下面几节我们就来探索一下包括一般奇维空间的一些性质．

定义7　在实域 R 上添加一个非实域及非平面复数中的元素e，使其满足

$$e^3-1=0$$

则构成元素形状为

$$a=\alpha+\beta e+\gamma e^2\ \ (\alpha、\beta、\gamma\in R)$$

的三维数，亦称可易三元数或三次单位数．记为N_1^3。

注意这里的 e 并不是复数中的三次单位根，对这个 e 复数中不存在不全为零的 α、β、γ 而使

$$\alpha+\beta e+\gamma e^2=0$$

而对复数中的三次单位根则不然。

可易三元数有着类似二维数一样的加、乘可交换顺序的运算方法．设

$$a_1=\alpha_1+\beta_1 e+\gamma_1 e^2 \qquad a_2=\alpha_2+\beta_2 e+\gamma_2 e^2$$

加减法

$$a_1\pm a_2=(\alpha_1\pm\alpha_2)+(\beta_1\pm\beta_2)e+(\gamma_1\pm\gamma_2)e^2$$

乘法

$$a_1a_2=(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2+\gamma_1\gamma_2)e+(\alpha_1\gamma_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\alpha_2)e^2$$

乘法实际上只要注意到e的指数大于3时，利用关系式$e^3=1$降低次数即可。

要求逆元a^{-1}，，可以通过等式$aa^{-1}=1$来进行，设a的逆元为$a^{-1}=x+ye+ze^2$，

由 $$aa^{-1}=1$$

得 $$(\alpha x+\beta z+\gamma y)+(\alpha y+\beta x+\gamma z)e+(\alpha z+\beta y+\gamma x)e^2=1$$

因此
$$\alpha x+\gamma y+\beta z=1$$
$$\beta x+\alpha y+\gamma z=0$$
$$\gamma x+\beta y+\alpha z=0$$

可得 $$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}$$

其中 $$\Delta_1=\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \alpha\end{vmatrix}\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}\gamma & \beta\\ \alpha & \gamma\end{vmatrix}\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}\beta & \alpha\\ \gamma & \beta\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha & \gamma & \beta\\ \beta & \alpha & \gamma\\ \gamma & \beta & \alpha\end{vmatrix} \tag{9}$$

定义 8 元素$\overline{a}=\Delta_1+\Delta_2e+\Delta_3e^2$叫做$a$的共轭元，$|a|_M=\sqrt[3]{a\overline{a}}=\sqrt[3]{|\Delta|}$ 叫做a的模。

因此，当模$|a|_M$不为零时，a有逆元$a^{-1}=\overline{a}/\Delta$。

定理 2 可易三元数 $a=\alpha+\beta e+\gamma e^2$ 为零及零因子的充要条件是$\alpha=\beta=\gamma$及$\alpha+\beta+\gamma=0$。

证明 充分性，上述条件下a可分解为

$$a=\lambda(1+e+e^2)\text{ 及 }a=\mu(1-e)$$

的形式。从而 a 为零及零因子。

必要性，a 为零及零因子时，必须$|a|_M=0$

即有 $$\begin{vmatrix}\alpha & \gamma & \beta\\ \beta & \alpha & \gamma\\ \gamma & \beta & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]=0 \tag{10}$$

从而有$\alpha+\beta+\gamma=0$或$\alpha=\beta=\gamma$。

因此可知，对非零及非零因子元素a，可进行除法运算$b/a=ba^{-1}$。

可易三元数能与空间的点或向量相对应。有趣的是，它的零模点也即零因子集是两相互垂直的集合，即满足$\alpha+\beta+\gamma=0$和$\alpha=\beta=\gamma$的点集。

我们把N_1^3中满足$\alpha=\beta=\gamma$的元素叫做第一类零因子集，记为ϑ_1；满足$\alpha+\beta+\gamma=0$的元素叫做第二类零因子集记为ϑ_2。ϑ_1、ϑ_2为中的元素叫做互为共轭零因子。

由定理2可得

推论 当且仅当非零元$\theta_1\in\vartheta_1$，$\theta_2\in\vartheta_2$ 时，$\theta_1\theta_2=0$。

在零因子集中包括零元0。以后我们把各种数中的零元0看成特殊的零因子元，即公共零因子元。

例1 试证$N_1{}^3$中任意元与零因子的乘积仍为该类零因子。

证明 设$\forall a\in N_1^3$，$\theta_1\in\vartheta_1$，$\theta_2\in\vartheta_2$。

因为 $(a\theta_1)\theta_2=a(\theta_1\theta_2)=0$ 所以$a\theta_1\in\vartheta_1$ 同理可得$a\theta_2\in\vartheta_2$

例2 设$\eta=x+ye+ze^2\in N_1^3$，试分析区域$|\eta|_M<\delta$在直角坐标系所描述的空间N_1^3中的形状。

解 由 $|\eta|_M<\delta$ 即$|\eta|_M^3<\delta^3$

可得
$$\begin{vmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{vmatrix}=x^3+y^3+z^3-3xyz<\delta^3$$

因此区域$|\eta|_M<\delta$是三次曲面$x^3+y^2+z^3-3xyz-\delta^3=0$所围成的原点周围的区域。它的形状象两个对合的喇叭。柄和

口部是无限伸展的，它们分别以直线$x=y=z$与平面$x+y+z=0$为渐近集。

研究课题 4　利用三次单位数来研究三维空间的几何。例如，利用$l=x(t)+y(t)e+z(t)e^2$，$S=x(u,v)+y(u,v)e+z(u,v)e^2$分别表示曲线和曲面，然后利用数的运算来研究曲线与曲面。又如利用$|\mu|_M<\delta$来定义邻域，建立新的几何等。

§5　某些可易四元数

四元数的最初形式要追逆到哈密尔顿。由于摒弃了乘法交换律。而限制了它在分析中的发展。但即使做出如此巨大的牺牲，其“虚部”仍成为现今应用甚为广泛的三维向量理论。近来也有人引入了下述复椭圆形式的可易四元数，参看文献29、60等。但可易四元数形式是多样的，我们观察几种情况。

1　**椭圆双曲数**

在实域R上添加非实域中的两个元素i和j，记为$R(i,j)$，令它们满足

$$i^2+1=0 \qquad j^2-1=0$$

构成一种如下形式的乘法可交换的可易四元数：

$$a=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij$$

它的运算法则和二维三维数一样，只要注意到i、j的性质即可。

例如为导出零因子和逆元，可先设逆元为

$$x=x_1+x_2i+x_3j+x_4ij$$

即有　　$ax=1$

由于高维数相等也是指各分量相同，对照等式左右两端，即

得：

$$\alpha x_1-\beta x_2+\gamma x_3-\delta x_4=1$$
$$\beta x_1+\alpha x_2+\delta x_3+\gamma x_4=0$$
$$\gamma x_1-\delta x_2+\alpha x_3-\beta x_4=0$$
$$\delta x_1+\gamma x_2+\beta x_3+\alpha x_4=0$$

因此 $x=x_1+x_2i+x_3j+x_4ij$

$$=\frac{\Delta_1}{\Delta}+\frac{\Delta_2}{\Delta}i+\frac{\Delta_3}{\Delta}j+\frac{\Delta_4}{\Delta}ij=a^{-1}$$

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha & -\beta & \gamma & -\delta\\ \beta & \alpha & \delta & \gamma\\ \gamma & -\delta & \alpha & -\beta\\ \delta & \gamma & \beta & \alpha\end{vmatrix} \tag{11}$$

Δ_1、Δ_2、Δ_3、Δ_4为第一行元素的代数余子式。

定义 9 $|a|_M=\sqrt[4]{|\Delta|}$叫做椭圆双曲数的模.

椭圆双曲数为零及零因子的充要条件是 $|a|_M=\sqrt[4]{|\Delta|}=0$。具体化就是$\alpha=\gamma$，$\beta=\delta$及$\alpha=-\gamma$，$\beta=-\delta$。

因此当$|a|_M\neq 0$，即 a 不为零及零因子时，a 才有逆元 a^{-1}。同时我们还可定义 a 的共轭元为 $\bar{a}=\Delta a^{-1}$. 即有$a\bar{a}=\Delta$。由于本书共轭元均有性质$\overline{ab}=\bar{a}\,\bar{b}$因而有

定理 3 以$|a|_M^n=|a\bar{a}|$定义的模长，均有等式：

$$|ab|_M=|a|_M|b|_M$$

证明 $|ab|_M^n=|ab\ \overline{ab}|=|a\bar{a}\ b\bar{b}|=|a\bar{a}||b\bar{b}|$

$$=|a|_M^n|b|_M^n.$$

2 重椭圆数

在实域上添加非实域元素i_1，i_2记为$R(i_1,\ i_2)$。令其满足：

$$i_1^2=i_2^2=-1$$

构成四元数的形状为

$$a=\alpha+\beta i_1+\gamma i_2+\delta i_1 i_2$$

同理可得 a 为零及零因子的充要条件为：$\alpha=\delta$，$\beta=\gamma$ 及 $\alpha=-\delta$，$\beta=-\gamma$。

非零及零因子均有逆元。其形式读者可练习推导。后面我们将说明它和椭圆双曲数是一种东西。

3　椭圆抛物数

实域上添加非实域元素 i，k，记为 $R(i,k)$使其满足：

$$i^2=-1 \qquad k^2=0$$

构成四元数形状为

$$a=\alpha+\beta i+\gamma k+\delta ki$$

$R(i,k)$中元素为零及零因子即奇异元的充要条件是 $\alpha=\beta=0$。

4　双调和数

实域添加非实元素 e，令其满足

$$e^4+2e^2+1=0 \qquad (12)$$

构成四元数的形状为

$$a=\alpha+\beta e+\gamma e^2+\delta e^3$$

设逆元　$a^{-1}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}e+\overline{\gamma}e^2+\overline{\delta}e^3$

利用等式　$aa^{-1}=1$

及（12）式，即利用$e^4=-2e^2-1$降低 e 的指数，可以列出方程组，求得

$$\overline{\alpha}=\frac{\Delta_1}{\Delta} \quad \overline{\beta}=\frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \overline{\gamma}=\frac{\Delta_3}{\Delta} \quad \overline{\delta}=\frac{\Delta_4}{\Delta}$$

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha & -\delta & -\gamma & (2\delta-\beta) \\ \beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ \gamma & (\beta-2\delta) & (\alpha-2\gamma) & (3\delta-2\beta) \\ \delta & \gamma & (\beta-2\delta) & (\alpha-2\gamma) \end{vmatrix}$$

而Δ_1，Δ_2，Δ_3，Δ_4为Δ第一行元素的代数余子式。

零因子的充要条件是$\Delta=0$，具体化后可得零因子是$\lambda(e^2+1)$，其中λ是任一双调和数。

同样也可由逆元定义共轭元$\overline{a}=a^{-1}\Delta$。．因而有$a\overline{a}=\Delta$。

这里要注意（12）式虽然可写成$(e^2+1)^2=0$，但不可以用$e^2+1=0$代替．因为双调和数是四维的．它的基是 1，e，e^2，e^3，在实域中并非线性相关，在椭圆数关系$e^2+1=0$中则不然。

可易四元数还有另外一些种类，一般都构成特殊的四维空间。如重双曲数、双曲抛物数等等，可参看文献42。

猜测1 用平面复数及各种高维复数的模构成距离空间、可得各种新的拓扑空间，建立新的几何学、分析学等，其中新的邻域、连续等概念可能在物理中有对应并具有十分重要的意义．

§6 广 域

本节我们建立一种便于进行四则运算的系统。由于它的广泛性和基础性，可能使数学本身和其它科学特别是物理学增添一种有用的工具。

定义10 如果一个体系X满足下列条件，则把X叫做广域。

对于$\forall a$，b，$c\in X$

① X中定义了两种运算，加法“+”和乘法“·”，使得

$$a+b\in X \qquad a\cdot b\in X$$

② 两种运算满足交换律 $a+b=b+a$, $a\cdot b=b\cdot a$.

③ 两种运算满足结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$,

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

④ 有乘对加的分配律：$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

⑤ 存在加法不变元，即零元0．使得$a+0=a$.

$\forall a\in X$，均有 $0\cdot a=0$。非零元a、b如果有 $a\cdot b=0$，则称a、b互为共轭零因子.

⑥ 存在加法逆运算，即减法“-”．使得$a-a=0$。从而有加法逆元$-a$.

⑦ 存在乘法不变元，即单位元1，使得 $a\cdot 1=a$.

⑧ 有乘法逆运算除法“÷”，使得$a\div a=a/a=a\cdot a^{-1}=1$. 元素$a^{-1}=1/a$叫做$a$的乘法逆元，简称逆元．$X$中除零和零因子（称为奇异元）外，其它元素（称为正则元）均有逆元.

定义11 如果上述条件中乘法不满足交换律，即存在a，$b\in X$，$a\cdot b\neq b\cdot a$，则把X叫做**广体**.

定义12 如果广域（或广体）中没有零因子，则该广域（或广体）叫做**域**（或**体**）.

因此，我们可以粗略地、感性地把广域看成一个可以进行加、减、乘、除的集合．实数是一种域，其它广域也非常象我们通常所说的实数域.

例1 有理数、实数、复数(椭圆复数)满足八个条件，因无零因子而构成域.

例2 前面的圆锥复数、可易三维数、可易四元数等均是广域.

例3 实变函数空间构成广域。零因子是函数值可为零的函数。

例4 方阵代数是广体。因乘法不可易。行列式为零的奇异阵是零因子。

例5 以整数 N 为模的剩余类是一种广域。与 N 有公共因子的元素是零因子。对于非零因子 a，同余式 $ax=1$ $(modN)$ 总有解，即 a 有逆元 $a^{-1}=x$。

对于熟悉代数的人可能注意到，广体与环或代数的区别在于：上述条件中第八条去掉，它就只是一个环或代数，而不是广体、广域了。例如，整数、实域上的多项式，只是环或代数而不是广域。

在条件中如果加法不变元采用符号 θ，乘法不变元采用符号 e，那么就需要定义实数与 X 中元素的乘法运算：$\forall a\in X$，α，$\beta\in R$。

$0a=\theta$，$1a=a$，$\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ 等等。

但由于广域中采用自己的加法及乘法不变元，和采用实域中的 0 和 1 来代替它们所形成的广域有同构关系。正象复数（椭圆）的表示法被大家所熟悉而又甚为方便一样，我们现在也采用这两个常用符号.

广域乘法一般也省略“·”号。

对基础的微小变革，可能对上层建筑发生很大的影响。因此，研究现今科学中的基础概念和法则，是十分重要的工作。以下的课题似乎是应该进行的。

研究课题5 三个或更多种运算及其逆运算体系的研究，以及这些代数系统在科学中的应用.

§7　广域同构与扩张

关于域的扩张，某种意义椭圆复数是最大的域，它再也不能扩张了．对于广域呢，它的扩张有限度吗？我们怎样判断扩张后两个广域同构或不同构呢，下面我们来讨论一下．本节中的概念与结果也都适用于广体．

定义13　对于广域 A 和 B 间，如果存在一一对应的映射 f，使得 $\forall a, b\in A$ 有 $f(a), f(b)\in B$

并且：
$$f(\lambda a)=\lambda f(a)\quad(\lambda\in R)$$
$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$
$$f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$$

则称广域 A 与 B **同构**．记为$A\simeq B$

定义14　如果广域是线性空间，即元素可写成$a=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$（或$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$）的形状．则把分量$\alpha_k$所在的集合叫做$A$的**分量域**，$X$叫做$A$上的广域，$e_k$叫做$X$在$A$上的**基**．$e_k$所在的集合$E$叫做**基群**．

分量域与基群可以是广域及半群．定义13中的 R 也可是某同一分量集．

定理4　广域X与X'同构的充分必要条件是分量域相同，且在其上存在具有相同乘法表的基．

证明　必要性，由 X与 X' 同构必有满足同构映射的f．设e_1，e_2，…，e_n为X的一组基，则可取$f(e_1)$，$f(e_2)$，…，$f(e_n)$为X'的一组基．

由e的乘法表
$$e_ie_j=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}e_k\qquad(\gamma_{ij}^{k}\in R)\tag{13}$$

得：

$$f(e_i e_j)=f(e_i)f(e_j)=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}f(e_k)$$

充分性，设X与X'乘法表相同的基为：

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n \quad 与 \quad e'_1,\ e'_2,\ \cdots,\ e'_n$$

且 $$e_i e_j=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}e_k,\quad e'_i e'_j=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}e'_k$$

则可取$e'_i=f(e_i)$ 为同构映射，计算即得：

$$f(\lambda a)=\lambda f(a),\ f(a+b)=f(a)+f(b),$$
$$f(ab)=f(a)f(b).$$

例1 椭圆双曲数$R(i,\ j)$和重 椭圆数$R(i_1,\ i_2)$同构。因为它们有相同乘法表的基：

$$1,\ i,\ j,\ ij \qquad 与 \qquad 1,\ i_1,\ i_1 i_2,\ i_2.$$

定义15 如果广域（或广体）A添加元素集合B构成新的广域（或广体）G，则称G是A的广域（或广体）扩张。如果G中无零因子，则称为域（或体）扩张。

因此扩张既指一种过程，又是一种结果。关于广域扩张，有如下一个与域扩张相对应但结论不同的一个定理：

定理5 任何一个广域（或广体）X，均可扩张得到一个新的广域（或广体）$\widetilde{X}$。

证明 设$x,\ x'\in X$； $\alpha,\ \beta\in R$

可于X添加非X中元素j，构成形如$x+\alpha j$的广域。因为定义

$j^2=1$，

加法 $(x+\alpha j)+(x'+\beta j)=(x+x')+(\alpha+\beta)j$

乘法 $(x+\alpha j)\cdot(x'+\beta j)=(xx'+\alpha\beta)+(x\beta+x'\alpha)j$

易知形如$x+\alpha j$形状的元素满足广域所要求的八条，构成新的广域（或广体）$\widetilde{X}$。$\widetilde{X}$中零因子元的形状是：

$$\lambda(1+j),\ \mu(1-j).\ \lambda,\ \mu\in X.$$

事实上，此定理的证明可采用添加多种性质的元素与

可。广域种类的无限性必然显示出它将比域更丰富多采并具有更多的用场。

例2 椭圆复数域是实域添加元素 i 后的域扩张。而双曲、抛物数是实域添加元素 j、k 后的广域扩张。

例3 在复域上添加j、k，满足

$$j^2=k^2=i^2=-1,\qquad ij=-ji=k,$$

$$jk=-kj=i,\qquad ki=-ik=j.$$

构成哈密尔顿四元数

$$q=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$$

它是复数的体扩张。

例4 单变量的实函数$f(x)$添加两个变元后构成三个变量的实函数$f(x,y,z)$，是一种广域扩张。

定理6 实域上的二维广域扩张与 C、P、H 三种之一同构。

证明 设实域扩张基为1、ω，积 $\omega^2=\alpha\omega+\beta$，在$C$、$P$、$H$中可造成乘法表相同的基：

取$\alpha^2+4\beta=\Delta$于是

$$\Delta<0,\quad C\text{中取}1,\ \omega'=\frac{1}{2}(\alpha+\sqrt{|\Delta|}\,i)$$

$$\Delta=0,\quad P\text{中取}1,\ \omega'=\frac{1}{2}(\alpha+k)$$

$$\Delta>0,\quad H\text{中取}1,\ \omega'=\frac{1}{2}(\alpha+\sqrt{\Delta}\,j)$$

易知，1，ω'与1，ω乘法表全同。

定理7 复域上的二维广域扩张与椭圆双曲数或椭圆抛物数之一同构。

证明方法类似前一定理。

研究课题6　各种维数的广域及广体的分类.

习　题　二

1　在三次单位数N_1^3中计算

①　$(\alpha+\beta e+\gamma e^2)^2$　　　②$\frac{1}{1+e}$

③　$|1+e^2|_M$　　　④　$\sqrt{1+e+e^2}$

2　在N_1^3中求方程$z^6-z^3=0$的解。

3　试证实域上三次单位数空间N_1^3中，任一平面上均有零因子。

4　复域上的三元数是实域上的六维数，写出这种六维数在实域上的基，进而写出P、H上的可易三元数在实域上的基。

5　在可易四元数中计算

①　$(1+i+j)(1-i)$　　②$(1-i+k)^2$

③　$(1+2i+2j+ij)^2$　　④　$\frac{1}{1+i-k+ik}$

6　在椭圆双曲数中求方程$x^4-1=0$的解。

7　导出$\sqrt{\alpha+\beta i+\gamma k+\delta ik}$的计算公式。

8　试证椭圆双曲数$\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij$可以分解为$(\alpha'+\beta' i)(\gamma'+\delta' j)$，$\alpha'$、$\beta'$、$\gamma'$、$\delta'\in R$的充要条件是：

$\alpha/\beta=\gamma/\delta$

9　证明定理7。

10　试导出椭圆抛物数$R(i,\ k)$零因子充要条件和逆元。

11　你能构造出其它形式的四元数吗？试导出双曲抛物数的规律。

12　可易三元数空间N_1^3中由零因子所隔开的不连通区域有几个？什么情况下，N_1^3中一条封闭曲线内部不含零因子？

13 设 e 为双调和数的基，试计算

① $(e+1)^4$ ② $(e^3+1)(e^3-1)$

14 试构造出只有三个元素的域和只有四个元素的广域.

15 举出广域和广体例子各一个.

16 试举出广域扩张和广体扩张的例子各一个.

17 在广域八个条件中，你能否修改其中的某些而变成一种新的独立体系?

§8 n维多项式数

本节中我们来考察一种较一般的广域扩张。这种扩张的简明形式可能给我们带来许多有用的东西。

定义16 广域 A 中添加非 A 中元素 e，使它满足系数在A中的代数方程

$$\varphi(e)=e^n+a_1e^{n-1}+a_2e^{n-2}+\cdots+a_{n-1}e+a_n=0 \tag{14}$$

则称$A(e)$为广域A的**单元基广域代数扩张**。e 叫做**元基**. 方程14叫做扩张的**示性方程**。当A为域，且$\varphi(e)$ 在A上不可约时，广域$A(e)$就是域扩张.

这时 e 不满足次数低于 n 的其它代数方程，我们把形如

$$a=\alpha_0+\alpha_1e+\alpha_2e^2+\cdots+\alpha_{n-1}e_n{}^{n-1} \qquad (\alpha_i\in A)$$

的数叫做 **n 维多项式数**.

这种数的加、减运算是对应分量的加减，而乘法运算是利用示性方程将 e 的方幂$\geqslant n$的项化成低于n 次的形式。a 的逆元可由 $ab=1$ 的方程中解得b的各分量β_0，β_1，…，β_{n-1}，构成。而使$\theta_1\theta_2=0$有解的条件，就是 θ_1、θ_2为零因子的条件。具体说来，一般应由（14）的因式所构成。

前面我们所见的平面复数、三维复数、双调和数都是特殊

n 维多项式数的例子。下面我们再观察两例

1　**n阶微量数**

在实域中添加元基e，使其满足

$$e^n = 0 \tag{15}$$

构成元素形状为

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \cdots + \alpha_{n-1} e^{n-1}$$

的 n 阶微量数。记为N_0^n。

为求逆元$a^{-1} = \beta_0 + \beta_1 e + \beta_2 e^2 + \cdots + \beta_{n-1} e^{n-1}$ 可 利 用

$$aa^{-1} = 1$$

解得β代入后整理得：

$$a^{-1} = \frac{1}{\alpha_0^n}[\alpha_0^{n-1} - \alpha_0^{n-2} s + \alpha_0^{n-3} s^2 - \cdots + (-1)^{n-1} s^{n-1}]$$

其中$s = \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \cdots + \alpha_{n-1} e^{n-1}$称为$N_0^n$的虚部。

定义17　$\bar{a} = \alpha_0^{n-1} - \alpha_0^{n-2} s + \alpha_0^{n-3} s^2 - \cdots + (-1)^{n-1} s^{n-1}$ 叫做N_0^n中元素 a 的**共轭元**，显然$a\bar{a} = \alpha_0^n$。

$$|a|_M = \sqrt[n]{|a\bar{a}|} = |\alpha_0|$$

叫做a 的**模长**。

n 阶微量数的零因子就是它的虚部s，即当 $\alpha_0 = 0$时为零因子。在 n 维空间中，它的零模点是除实轴以外其它各坐标的交积，即由它们作为坐标的多维空间。

这种数的运算与分析中略去n阶无穷小量保留 $n-1$阶无穷小量的运算性质类似。元基 e 类似于幂零阵。

2　**n次单位数**（n阶循环数）

在实域上添加非实域元基 e，令其满足

$$e^n = 1 \tag{16}$$

构成元素形状为

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \cdots + \alpha_{n-1} e^{n-1}$$

的 n 次单位数，记为N_1^n。

利用 $aa^{-1}=1$ 可求得逆元为

$$a^{-1}=\frac{1}{\Delta}(\Delta_0+\Delta_1 e+\Delta_2 e^2+\cdots+\Delta_{n-1}e^{n-1})$$

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots\cdots & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{n-1} & \cdots\cdots & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots\cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \end{vmatrix} \tag{17}$$

$\Delta_i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$为$\Delta$中第一行元素的代数余子式。

定义18 N_1^n中定义 a 的共轭元为

$$\overline{a}=\Delta a^{-1}=\Delta_0+\Delta_1 e+\Delta_2 e^2+\cdots+\Delta_{n-1}e^{n-1}.$$

模为 $|a|_M=\sqrt[n]{|a\overline{a}|}=\sqrt[n]{|\Delta|}$

零因子的条件是$\Delta=0$。

例1 在N_0^3中求元素$a=1+e$的逆元

解 设$a^{-1}=\alpha+\beta e+\gamma e^2$

由 $aa^{-1}=1$，即$(1+e)(\alpha+\beta e+\gamma e^2)=1$

得 $\alpha+(\alpha+\beta)e+(\beta+\gamma)e^2=1$

即 $\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha+\beta=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases}$ 得 $\begin{matrix}\alpha=1\\ \beta=-1\\ \gamma=1\end{matrix}$

因之 $a^{-1}=1-e+e^2$。

例2 试证四次单位数N_1^4与椭圆双曲数 $R(i,j)$同构。

证明 四次单位数中取基1、e、e^2、e^3；椭圆双曲数中取基1、$\sqrt{j}$、j、$j\sqrt{j}$，其中

$$\sqrt{j}=\frac{1}{2}(1+i+j-ij)$$

$$j\sqrt{j} = \frac{1}{2}(1-i+j+ij).$$

利用示性方程$e^4=1$和$i^2=-1$，$j^2=1$可知上述两组基乘法表相同。因此N_1^4和$R(i,\ j)$同构。

n维多项式数与一种A上的“斜方阵”所成的广域同构。但现今这种表述方式简明方便，故采用它。别的数也类似。

研究课题 7　其它具体的n维多项式数的规律.

§9　实域和复域上的单元基扩张

关于实域和复域上单元基扩张，我们还有下面的一些规律：

定理 8　实域或复域上单元基代数扩张有

① 扩张后基有限。

② 示性方程是唯一的。

证明　①显然$1,\ e,\ e^2,\ \cdots,\ e^{n-1}$。是它的基。

②设元基e满足S个系数在R或C中相容的代数方程：

$$\varphi_i(e)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots S) \qquad (18)$$

取其中次数最小的$p(e)=\varphi_k(e)$。设其次数为m。利用多项式除法可得

$$\varphi_i(e)=q_i(e)p(e)+r(e)=0 \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ S)$$

其中$r(e)$次数小于m。由于$p(e)=0$，得$r(e)=0$与m是最小次数矛盾。因此

$$\varphi_i(e)=q_i(e)p(e)=0 \ (i=1,\ 2,\ \cdots S)$$

这里如果$q_i(e)=0$则可继续上述过程直至

$$\varphi_i(e)=t_i(e)p^{\lambda}(e)=0 \quad 而 t_i(e)\neq 0。$$

因此$\varphi_i(e)=0$的作用将完全由$p(e)=0$所决定。例如扩张后的维数为m等。

如果示性方程18系数在C中，则构成复域的广域扩张。这时我们较容易地将它们分类：

定理9 两个复域C的代数广域扩张，如果其示性方程分解式分别为：

$$\varphi(e)=(e-\lambda_1)^{s_1}(e-\lambda_2)^{s_2}\cdots(e-\lambda_m)^{s_m}=0$$

$$\tilde{\varphi}(e)=(e-\tilde{\lambda}_1)^{s_1}(e-\tilde{\lambda}_2)^{s_2}\cdots(e-\tilde{\lambda}_m)^{s_m}=0$$

$$(s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_m)$$

则不论λ数值如何，指数s_1，s_2，…，s_m对应相同时即同构。

证明 分别选择二者在复域上的基ω_0，ω_1，…，ω_n和$\tilde{\omega}_0$，$\tilde{\omega}_1$，……，$\tilde{\omega}_n$为

1，$(e-\lambda_1)$，…，$(e-\lambda_1)^{s_1}(e-\lambda_2)$，…，$(e-\lambda_1)^{s_1}(e-\lambda_2)^{s_2}\cdots(e-\tau_m)^{s_m-1}$。

1，$(e-\tilde{\lambda}_1)$，…，$(e-\tilde{\lambda}_1)^{s_1}(e-\tilde{\lambda}_2)$，…，$(e-\tilde{\lambda}_1)^{s_1}(e-\lambda_1)^{s_2}\cdots(e-\tilde{\lambda}_m)^{s_m-1}$。

这里每个ω和$\tilde{\omega}$都是线性无关的，否则将用次数低于n的示性方程。

上述基由于代数运算全同，因此它的乘法表全同。即两种扩张同构。

实域上的单元基扩张分类的研究尚不十分深入，但除二维外尚有一个三维结果。

定理10 实域上三维广域扩张分成四种类型：

（1）$\theta^3=0$ （2）$\theta_1^2\theta_2=0$ (19)

（3）$\theta_1\theta_2\theta_3=0$ （4）$\theta\omega=0$

其中θ为e的一次因子，ω为e的二次因子。

证明参看文献65。

例1 双调和数元基满足$e^4+2e^2+1=0$。假设又有$e^2+1=0$。那么它原有的示性方程将无用处。

因为四维数 $a=\alpha+\beta e+\gamma e^2+\delta e^3$利用次数较小的关系$e^2+1=0$，将变成一个二维数$a=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)e$。这种数即同构于平面椭圆复数。

例2 由定理10三次单位数N_1^3元基e的示性方程$(e-1)(e^2+e+1)=0$与另一种可易三元数示性方程$(e-1)(e+1)^2=0$是不同构的。

直接证明是：后者中有一幂零元

$$a=(e-1)(e+1) \qquad a^2=0$$

而N_1^3中若有元素$a^2=0$，则可由

$$a^2=(\alpha+\beta e+\gamma e^2)^2=(\alpha^2+2\beta\gamma)+(\gamma^2+2\alpha\beta)e+(\beta^2+2\gamma\alpha)e^2=0$$

即 $\alpha^2+2\beta\gamma=0$，$\gamma^2+2\alpha\beta=0$，$\beta^2+2\gamma\alpha=0$

得 $\alpha=\beta=\gamma=0$。

即N_1^3中不存在非零的幂零元，与后者不同构。

猜测2 实域上的多维代数广域扩张的分类将由示性方程分解式

$$\varphi(e)=\omega_1^{s_1}\omega_2^{s_2}\cdots\omega_k^{s_k}\cdot\theta_1^{p_1}\theta_2^{p_2}\cdots-\theta_m^{p_m}=0$$

中的二次因子ω与一次因子θ应的指数s_1，s_2，$\cdots s_k$，p_1，$p_2\cdots$，p_m确定，即排列后指数的对应相同则同构。

§10 广域正交化与无穷维数

本节主要探讨一下广域正交化与无穷维超越扩张。后者是一个尚需进一步探索的问题。

定义19 如果ω_1，ω_2，$\cdots\omega_n$是域F上的广域空间X的一组基，且满足

$$\omega_i\omega_j=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ \omega_i^2\neq 0 & (i=j)\end{cases}\tag{20}$$

则称ω为X的**正交基**。将广域用正交基表示则称为**正交化**。

定义20 如果元素a满足$a^k=0$，则称a为**幂零元**。使它成立的最小整数k称为**幂零元的阶数**。

定理11 如果X中存在正交基（20），则存在一组基$\tilde{\omega}$，使得

$$\tilde{\omega}_i\tilde{\omega}_j=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ \tilde{\omega}_i & (i=j)\end{cases}\tag{21}$$

证明 设ω为满足（20）的一组基，且

$\omega_i^2=\alpha_{i1}\omega_1+\alpha_{i2}\omega_2+\cdots+\alpha_i\omega_i+\cdots+\alpha_{in}\omega_n$用$\omega_j$（$j=1$，2，$\cdots$，$n$）乘等式两边，当$i\neq j$时

得 $\alpha_{ij}\omega_j^2=0$

所以 $\alpha_{ij}=0$ $(i\neq j)$

由此 $\omega_i^2=\alpha_{ii}\omega_i$

取 $\tilde{\omega}_i=\omega_i/\alpha_{ii}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots n)$

易知他们满足（21）。

今后把满足（21）的基$\tilde{\omega}$叫**标准正交基**。

定理12 域F上广域X可正交化的必要条件是X中不存在非零的幂零元。

证明 若其中有非零的幂零元a用标准正交基表示为：

$$a=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n$$

由 $a^k=0$

得 $\alpha_1^ke_1+\alpha_2^ke_2+\cdots+\alpha_n^ke_n=0$

因此 $\alpha_i^k=0$，$\alpha_i=0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

矛盾。

猜测3 定理12中条件是充分的.

定理13 复域C上单元基广域扩张X可正交化的充分必要条件是示性方程中的多项式无重因式.

证明 设其示性方程为

$$f(e)=e^n+\alpha_1e^{n-1}+\alpha_2e^{n-2}+\cdots+\alpha_n=0$$

必要性，若其有重因式，即

$$f(e)=\varphi^k(e)\cdot q(e) \qquad (k>1)$$

则X中有二阶幂零元$\varphi^{k-1}(e)q(e)$。与定理12矛盾.

充分性，设

$$f(e)=(e-a_1)(e-a_2)\cdots(e-a_n)=0, \quad (a_i\neq a_j \quad i\neq j)$$

取 $\varphi_i=(e-a_1)\cdots(e-a_{i-1})(e-a_{i+1})\cdots(e-a_n)$

所以

$$\varphi_i\varphi_j=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ \varphi_i^2 & (i=j)\end{cases}$$

另一方面，φ_1，φ_2，…，φ_n是C上线性无关的。因为如果它们在C上线性相关，则存在$n-1$次式

$$g(e)=\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_n\varphi_n=0$$

这与示性方程唯一性矛盾.

例1 双曲复数H可正交化。因其示性方程$j^2-1=(j-1)(j+1)=0$。正交与标准正交基为：

$$\varphi_1=1+j \qquad \tilde{\varphi}_1=\frac{1}{2}(1+j)$$

$$\varphi_2=1-j \qquad \tilde{\varphi}_2=\frac{1}{2}(1-j)$$

例2 椭圆抛物数$R(i, k)$不可正交化。因其中有二阶幂零元。如k，jk，等等，有

$$k^2=(jk)^2=0$$

例3 三次单位数N_1^3，在复域C上可正交化，因示性方程在C上可分解为一次因式：

$$e^3-1=(e-1)\left(e+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(e+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

正交基和标准正交基为

$$\varphi_1=(e-1)\left(e+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\qquad \tilde{\varphi}_1=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{6}\varphi_1$$

$$\varphi_2=(e-1)\left(e+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\qquad \tilde{\varphi}_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{6}\varphi_2$$

$$\varphi_3=(e^2+e+1)\qquad \tilde{\varphi}_3=\frac{1}{3}\varphi_3$$

研究课题8 除椭圆复域C外其它域(如实域R)广域扩张的正交化研究.

§11 无穷维单元基扩张

以上各节我们考察了一些有限维广域的性质。但广域并不限于有限维，它也可能是无穷维的。而且无穷维也并非一种形式．本节只是初步探讨一下无穷维广域扩张的两种形式。

1 不定元扩张

定义21 如果广域X上单元基扩张添加一个没有示性方程的元基e。则称e为X上的**不定元**。这时构成X上的无穷维数。

单元基不定元的广域扩张没有示性方程，因此它具有通

常变量函数的一些性质.

无穷维数的元素有多种形式. 例如

① $a=\alpha_0+\alpha_1 e+\alpha_2 e^2+\cdots+\alpha_n e^n+\cdots$

② $a=\cdots+\alpha_{-n}e^{-n}+\cdots+\alpha_{-1}e^{-1}+\alpha_0+\alpha_1 e+\cdots+\alpha_n e^n+\cdots$

它们相似于幂级数与罗朗级数.

逆元可由方程 $ax=1$，等式两边 e 各次幂的对应系数相等，列出一无穷形式的线性代数方程组求得.

例1 在复域 C 上添加不定元 z，构成在某圆环 D 内的解析函数。一般元素形状是

$$f(z)=\cdots+c_{-n}z^{-n}+\cdots+c_{-1}z^{-1}+c_0+c_1 z+c_2 z^2+\cdots+c_n z^n+\cdots$$

即函数$f(z)$的罗朗级数表达式。在 D 内函数值为零的函数是零因子。非零及非零因子元有逆元

$$[f(z)]^{-1}=\frac{1}{f(z)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k' z^k$$

除上述形式外，无穷维单元基不定元扩张元素还可有其它形式，如富立叶级数形式等等。但是，能否对有示性方程的单元基扩张，也成为无穷维呢？我们下面作一种探讨性的研究。其中许多问题尚未弄清楚，这里只是抛砖引玉，供大家讨论.

2 超越扩张

定义22 如果单元基扩张的示性方程不是代数方程，而是超越方程$f(e)=0$，则称扩张为广域**超越扩张**.

广域超越扩张如果以 $1, e, e^2, \cdots, e^n, \cdots$ 为基，则它构成一种无穷维数.

例2 实域中添加非实域元基 e，使它满足一个超越方

程：

$$\sin e = 0 \qquad (22)$$

构成一种超越扩张。这里 $e \notin R$，，因此不是 $k\pi$

元素 $a = \alpha_0 + \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \cdots + \alpha_n e^n + \cdots \qquad (\alpha \in R)$

它与相差 $\sin e$ 倍数的元素相等，即

$$a' = a + n\sin e = a$$

这有点象同余类 相等，即以 $\sin e$ 为模的同 余类相等。因此两个元素相等不能认为是各分 量的系 数相 等，而 是总体差 $\sin e$展开式的倍数。

它有无穷多零因子，$\sin\frac{e}{2}$，$\cos\frac{e}{2}$，$\sin\frac{e}{4}$，$\cos\frac{e}{4}$ ……等等。以一类零因子为坐标，可把这种数展成正交形状。

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \theta_i$$

其中

$$\theta_i = \sin e / \sin\frac{e}{2^i} \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

即从 $\sin e$ 的因式中去掉$\sin\frac{e}{2^i}$这一因子。

可知 $\theta_i \theta_j = 0$ $(i, j > 0, i \neq j)$

要求一个元素的逆元，也需列出一无穷形式的线性方程组。由于在元素相等时的同余性，其逆元的形式有多种。也导出多种形式的零因子。因为本书只是提出一个初步想法，是否完备尚需进一步探讨。

研究课题 9　本节二中广域超越扩张的完备、深化与应用.

§ 12 泛复数

为了在一个系统中建立分析学，就需要在系统中引入邻域、极限、连续等。这对于只有单纯的代数运算是不够的，还必须在其中建立范数和构成巴拿赫代数。对这些概念不熟悉的读者可参看书后的附录：赋范空间与巴拿赫代数。

本节引入的泛复数是对研究分析学十分方便的系统。

定义23 如果一个广域 X 是巴拿赫代数，那么就称它为泛复数。

关于泛复数与本书中代数概念的关系，我们可用一直观的图形描述。图中每一个圆均定义了一个概念。广域与巴拿赫代数的交集即图中阴影部份为泛复数。

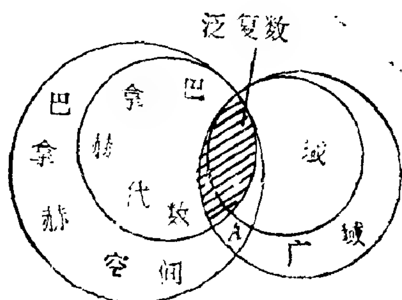


图 3

例1 $X=C(a, b)$ 即 $[a, b]$ 上复值连续函数的全体，如果定义范数

$$\|f\|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

则 X 为泛复数。$[a, b]$ 上 $f(x)$ 有零点的函数称为零因子。

例 2 实域上的 n 阶微量数 N_5^n。示性方程为 $e^n=0$。对元素

$$a=\alpha_0+\alpha_1 e+\alpha_2 e^2+\cdots+\alpha_{n-1}e^{n-1}$$

定义范数

$$\|a\|=|a|_M=|\alpha_0|$$

构成泛复数。例如我们验证一下构成巴拿赫代数的条件 $\|a\|\ \|b\|\geqslant\|ab\|$。

设 $b=\beta_0+\beta_1 e+\beta_2 e^2+\cdots+\beta_{n-1}e^{n-1}$

则 $\|ab\|=|\alpha_0\beta_0+(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)e+\cdots\cdots|$

$$=|\alpha_0\beta_0|=|\alpha_0|\,|\beta_0|=\|a\|\ \|b\|$$

例 3 以整数 N 为模的剩余类构成广域，但无法定义范数，不能构成巴拿赫代数。因此不是泛复数。

例 4 双曲数 H 中元素 $a=\alpha+\beta j$ 如果按 $\|a\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ 定义范数，则仅构成巴拿赫空间，不构成巴拿赫代数。因为设

$$a=\alpha+\beta j,\quad b=\gamma+\delta j$$

$$\|ab\|^2=(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)^2$$

$$\|a\|^2\|b\|^2=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)$$

$$\|ab\|^2-\|a\|^2\|b\|^2=4\alpha\beta\gamma\delta$$

不能保证 $\|ab\|\leqslant\|a\|\ \|b\|$。

因此在上述范数的意义下双曲复数不是泛复数。但改变范数的定义方式后，如定义

$$\|a\|=\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

则 H 又是泛复数。

对于有限维的广域，适当定义范数后，一般都可构成巴拿赫代数。因此我们以前所见到的各种数都是泛复数。

而在一般广域中的模$|a|_M$及通常的欧氏模不一定满足巴拿赫代数范数的四点要求，因此它们和泛复数中定义的范数$\|a\|$不是同一个量。但某些时候它们可以统一，如椭圆复数C中，$\|a\|=|a|_M=|a|$。一般泛复数的范数，后面将予叙述。

泛复数可构成空间，其中元素构成点。

定义24 实数 $d=\|x-x_0\|$叫做泛复数空间 X 中的点x、x_0间的**距离**。满足$\|x-x_0\|<\delta$的点x的集合叫做x_0的δ**邻域**。记为$x\in N(x_0, \delta)$。

定义25 对于泛复数数列x_1，x_2,…,x_n,…若存在泛复数x_0使$\forall\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时$x_n\in N(x_0, \varepsilon)$时则叫做数列$\{x_n\}$收敛于泛复数$x_0$。或叫趋向极限$x_0$. 记为$x_n\to x_0$. 或$\lim\limits_{n\to\infty} x_n\to x_0$。若$\{x_n\}$不收敛于任何泛复数，则称它是发散的。泛复数极限有类似实数极限的各种性质。

注意$x_n\to x_0$在确定数列的收敛中是从固定方向趋向x_0。但如果用在变量$x\to x_0$则是指变量x可从任意方向趋向x_0。

例 5 双曲复数$a=\alpha+\beta j$按范数$\|a\|=|\alpha|+|\beta|$构成泛复数，a的ε邻域$N(a, \varepsilon)$是以a为中心的边长为2ε的正方形。

例 6 例2 N_0^n中空间点a的ε邻域是除实部小于ε外，其它各维均无限制的无限空间。

猜测 4 是巴拿赫空间的广域，适当定义范数后，一定能构成泛复数. 即图 3 中扇形A也应为泛复数.

§13 泛复数扩张

泛复数同样可以扩张，使其范围和形式可根据需要不断

扩大。

定义26 设X、$\widetilde{X}$为泛复数，若$X\supset\widetilde{X}$，且是真包含，则称X为的$\widetilde{X}$的泛复数**扩张**，$\widetilde{X}$为X的**子泛复数**。

定义27 若$\widetilde{X}$是X的子泛复数，$\forall x\in X, \widetilde{x}\in\widetilde{X}$有$x\widetilde{x}\in\widetilde{X}$，则称$\widetilde{X}$为$X$的**理想**。

泛复数的扩张，当然也是一种广域的扩张。除了上面所见的形式外，尚有许多其它的形式。这里我们考察四种常见的形式：

1 添加

定义28 在泛复数X中添入一些新元素，$(e_1, e_2, \cdots e_n)$定义新元素与原有元素的运算后构成新的泛复数称为X的添加，记为$X(e_1, e_2, \cdots e_n)$。

以前我们所见的各种泛复数大多是添加的例子。下面我们再举一例：

例1 设X为任一泛复数，在X中添入两个元素i和k。构成新的泛复数$X(i, k)$其元素为

$$a=\alpha+\beta i+\gamma k+\delta ik. \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta\in X)$$

它的多数运算都与实域上的椭圆抛物数相同。但零因子的条件$\alpha=\beta=0$不是必要的了。例如α，β，γ，δ为X中的同类零因子时，a也构成$X(i, k)$中的零因子。

除了采用添加的办法外，泛复数扩张还可以采用两种"积"的方式对泛复数进行组合。

2 直积

定义29 设泛复数E和F的分量域相同它们的基分别为$(e_1, e_2, \cdots e_m)$和$(f_1, f_2, \cdots f_n)$。**直积扩张**为G它的基为$(g_1, g_2, \cdots g_{mn})$，则记

$$G=E\otimes F$$

$$(g_1, g_2, \cdots g_{mn}) = (e_1, e_2, \cdots e_m)\otimes(f_1, f_2, \cdots, f_n)$$
$$=(e_1f_1, e_2f_2, \cdots, e_mf_n) \qquad (23)$$

这时扩张的维数是$m\times n$维。

例2 椭圆双曲数实质由椭圆数与双曲数直积构成。即

$$R(i, j)=C\otimes H$$
$$(1, i, j, ij)=(1, i)\otimes(1, j)$$

3 交 积

定义30 记分量域相同的两泛复数E、F的交积为

$$G=E\times F$$
$$(g_1, g_2, \cdots g_k)=(e_1, e_2, \cdots e_m)\times(f_1, f_2, \cdots, f_n) \qquad (24)$$

其中g由e和f间定义的交积运算确定。

这时扩张的维数一般为$k<m\times n$。

例3 两个椭圆数的直积与交积为

$C_1\otimes C_2$ $(1, i_1)\otimes(1, i_2)=(1, i_1, i_2, i_1i_2)$ （4维）

$C\times C$ $(1, i)\times(1, i)=(1, i)$ （2维）

直积中须将两椭圆数的基区别开；交积中视两椭圆数中虚单位i为统一量。

例4 椭圆抛物数与双曲抛物数

直积为 $(1, i, k, ik_1)\otimes(1, j, k_2, jk_2)$

$=(1, j, j, k_1, k_2, ik_1, \cdots, ijk_1k_2)$ （16维）

交积为 $(1, i, k, ik)\times(1, j, k, ik)$

$=(1, i, j, k, ik, jk, ij, ijk)$ （8维）

交积中视二者抛物基K为统一的量，即规定了条件：

$$k_1=k_2=k.$$

4 无穷积

定义31 两类泛复数E和F，各自保存自己的特性后，

各取一个元素排列组成新的泛复数，构成泛复数的**无穷积**．记为

$$G=E\cdot F$$

这时G一般为无穷维的。

例 5　二重实数的无穷积

$$G=R\cdot R$$

元素形状为 $(a,\ b)$ ，其中$a,\ b\in R$

主单位元是 $(1,\ 1)$ ．a、b 中有一个为零元时则成为零因子．非零因子元有逆元$\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right)$．$G$并非二维，而是无穷维．因它的运算如下：

乘法：$(a,\ b)(c,\ d)=(ac,\ bd)$

加法：$(a,\ b)+2(a,\ b)=3(a,\ b)$

而没有任意情况下的$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d)$。

有元素与实数的乘法 $\alpha(a,\ b)$　$(\alpha a,\ ab)$ $(\alpha\in R)$ 因此只有当$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\alpha$时两元素加法才是

$$(a,\ b)+(c,\ d)=\alpha(c,\ d)+(c,\ d)=(\alpha+1)(c,\ d).$$

其它情况下$(a,\ b)$,(c,d)在实域上是线性无关的。因之它是无穷维的。

这里可定义加法不变元为$(0,\ 0)$。

研究课题10　泛复数的其他扩张方法，各种扩张方法间的关系．

习 题 三

1 试求实域扩张$R(e)$，示性方程为$e^4=1$，即四次单位数的元素形状及逆元、共轭元。

2 证明示性方程$(e-1)^2e=0$的广域与示性方程$e(e-1)(e-2)=0$的广域不同构。

3 将四次单位数N_1^4在C上正交化。找出它的标准正交基。

4 在五次单位数N_1^5中，计算：

$(e^2-1)^5$，　　e^{-1}

5 在n阶微量数N_0^n中计算

$(1+e^{\frac{n}{2}})^4$、$(1+e)^{-1}$

6 满足$a^2=a$的泛复数，叫做**幂等元**，试分别求平面复数C、P、H中及四次单位数N_1^4中的幂等元。

7 试分析示性方程为$e^3-2e^2-e+2=0$的类型，它与三次单位数N_1^3在实域上是否同构？在复域上呢？并将它正交化，找出标准正交基。

8 试在椭圆抛物数$R(i,k)$中定义范数，使它构成泛复数。

9 举出两个泛复数的例子。

10 判别下列示性方程的复域上的单元基代数扩张是否同构。

① $e^4+1=0$，　　② $e^4+e^3-e^2-e=0$，

③ $e^4-1=0$，　　④ $e^4-5e^2+4=0$。

11 在三次单位数中N_1^3定义范数

$$\|a\|=\|\alpha+\beta e+\gamma e^2\|=|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$$

试验证它构成巴拿赫代数。并讨论满足$\|a\|<\delta$的a的范围。

12 椭圆数C与抛物数P分别同三次单位数N_1^3的直积是什么？交积呢？

13 椭圆双曲数$R(i,j)$与椭圆抛物数$R(i,k)$的直积与交积分别是什么？

14　实域上的幂级数，可以看成不定元x所生成的没有示性方程的无穷维泛复数，它的基可视为．1，x，x^2，….那么椭圆双曲数上的幂级数在实域上的基和在复域上的基分别是什么？

15　试证明圆锥复数中，同类零因子构成理想。

16　试找出椭圆双曲数与抛物双曲数交积的扩张$R(i,j)\times R(k,j)$中所有的理想。

17　举出一个超越扩张的例子，导出它的一些基本规律。

§14　广域多元基代数扩张

广域单元基扩张给我们带来了多种形式的泛复数，就象函数一样，我们自然会想到多元基的扩张，

定义32　在广域X中添加非X中的元素集合（e_1，e_2，…，e_n）除满足一般$e_ie_j=e_je_i$以及$e_i^{\lambda}e_i^{\mu}=e_i^{\lambda+\mu}$等乘法规律外，还满足系数在$X$中的相容代数方程组：

$$\varphi_k(e_1, e_2, \cdots, e_n)=0 \quad (k=1, 2, \cdots, m) \qquad (25)$$

扩张后的广域记为$X(e_1, e_2, \cdots e_n)$叫做广域A的**多元基代数扩张**。方程组（25）叫做**扩张的示性方程组**．（e_1，e_2，…，e_n）叫做**元基**。

广域多元基扩张，可以构成有限维空间。如实域上添加i，j，k，示性方程

$$i^2+1=0, \ j^2-1=0, \ k^2=0$$

构成一种八维空间$R(i, j, k)$ 它的基为

$$1, i, j, k, ij, jk, ki, ijk.$$

等等．以上我们所见的$R(i, j)$，$R(j, k)$等也都是有限维。

但是在更多的情况下，它们构成一些无穷维空间．而且各有自己的性质和用途。

例 1　三维调和数H_a^3

实域或复域添加元基，e_1，e_2，e_3，使其满足

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=0 \tag{26}$$

扩张后的广域是无限维的.如果把 1 看成零阶基，e_1，e_2，e_3看成一阶基，e_1^2，e_2^2，e_1e_2，e_2e_3，e_3e_1看成二阶基……。易知，这种广域有$2n+1$个线性无关的n阶整基：

$$e_1^\mu e_2^\tau e_3^\nu \qquad (\mu,\ \nu,\ \tau \text{为非负整数，且} \mu+\nu+\tau=n)$$

例 2　三维波数W^3

实域或复域添加元基e_1，e_2，e_3，e_4使其满足

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2-\alpha^2e_4^2=0 \qquad (\alpha\in R) \tag{27}$$

这种数也是无穷维的。它有$(n+1)^2$个n阶整基：

$$e_1^\lambda e_2^\mu e_3^\nu e_4^\tau \qquad (\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \tau \text{为非负整数} \lambda+\mu+\nu+\tau=n)$$

例 3　正交数

实域添加元基e_1，e_2，e_3，$\cdots e_{n-1}$，满足

$$\begin{cases} e_ie_j=0 & (i\neq j) \\ e_i^2=e_i & (i=j) \end{cases} \tag{28}$$

其中i，j为 1，2，…，$n-1$，因此它构成有限维数。如果将主单位元 1 独立，则构成一种n维数。元素形状为

$$a=\alpha_0+\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_{n-1}$$

它的零因子条件为

$$a_0\neq 0 \quad \text{及} \quad a_i\neq -a_0 \qquad (i=1,\ 2,\cdots,n-1)$$

非零及零因子元a有逆元

$$a^{-1}=\frac{1}{\alpha_0}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_0+\alpha_1}e_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_0+\alpha_2}e_2-\cdots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0+\alpha_{n-1}}e_{n-1}\right)$$

这个逆元也是利用等式$aa^{-1}=1$求出的。

由前面定理可知，复数域C上单元基代数扩张示性方程

无重因式时定可正交化．但这种扩张的主单位元1包含在基的组合中．即有

$$e_1+e_2+\cdots+e_n=1.$$

如果把它当作一个基，其它用e_2，e_3，…，e_n再作为基，则可知它与正交数基的乘法表相同．因此我们有

定理14 复域C上单元基代数广域扩张，当示性方程无重因式时，与正交数同构．

例4 多元基微量数

实域添加e_1，e_2，e_3，…，e_n，满足

$$\begin{cases}e^{p_i}=0\\ e_ie_j=e_je_i=0\end{cases}\quad 或者\begin{cases}e^{p_i}=0\\ e_ie_j=e_je_i\neq 0\end{cases}\quad (i\neq j)\tag{29}$$

（i，$j=1$，2，3，…，n，P_i为正整数）

均可构成一种多元基的微量数．它元素的形状为：

$$a=\sum_{k=0}^{m}\alpha_k e_1^{\gamma_1}e_2^{\gamma_2}\cdots e_n^{\gamma_n}$$

$$(\gamma_i<p_i,\ m=p_1p_2\cdots p_n)$$

上面我们观察了两个有限维和两个无限维多元基代数扩张的例子．在无限维的情况下，由于基的无限性往往对我们研究感到不便，因此也可根据具体情况对基采取“截断”措施．例如在三维调和数H_a^3中，令

$$e_1^k=e_2^k=e_3^k=0\qquad (k>2)$$

这时，它将仅具有$n\leqslant 3(k-1)$的n阶整基，这时H_a^3成为有限维形式．

另外也可使元基满足其它方程．例如H_a^3中令

$$e_1=1,\ e_2=i,\ e_3=k$$

其中 $i\in C$，$k\in P$ 则调和数与椭圆抛物数同构，它的基为1，i，k，ik．是有限的．当然这样处理后的扩张已经是

一种特例，不具有原无限维数的一般性质。

多元基广域代数扩张要成为泛复数还需要定义范数，构成巴拿赫代数。为此，对于元素

$$a=\sum_{k=0}^{m}\alpha_k e_k \qquad (\alpha_k\in R)$$

这里m可以有限，也可是无限的，定义范数

$$\|a\|=\sum_{k=0}^{m}|\alpha_k| \tag{30}$$

易证这种范数满足巴拿赫代数的要求。当然在和是无穷形式时，则须假定其和是收敛的。

研究课题11　对各种不同形式的多元基泛复数扩张进行深入的研究，主要是其特殊性质与结构，其结果必有较大的用途。

§15　有限维泛复数 S(e)

对于有限维的泛复数我们为了研究它的一般性质，特引入泛复数空间$S(e)$。它和有限维代数有许多相似之处和许多共性，但后者并不要求有逆元和范数等。这种有限维的泛复数空间保持着我们所熟悉的“数”的许多朴素性质。

空间$S(e)$的一般元素形状为：

$$z=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$$

其中$x_i\in R$，即它的分量域为实域R。因此任何实域上的有限维泛复数均是$S(e)$的一种。

$S(e)$中基的乘法表为

$$e_ie_j=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}e_k \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots n) \tag{31}$$

γ叫做代数结构常数。

由于元素对乘法要有交换律，因此由 $e_i e_j = e_j e_i$，γ 要满足

$$\gamma^k_{ij} = \gamma^k_{ji} \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

乘法还要符合结合律，因此由 $(e_i e_j)e_l = e_i(e_j e_l)$ 可导出结构常数还应有

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma^k_{ij}\gamma^m_{kl} = \sum_{k=1}^{n} \gamma^k_{jl}\gamma^m_{ik}$$

$$(i,\ j,\ l,\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

例 1 在三次单位数N^3_1中，它的乘法表如右，因此代数结构常数如下：

$\gamma^1_{11}=1$ $\gamma^2_{11}=0$ $\gamma^3_{11}=0$

$\gamma^1_{12}=0$ $\gamma^2_{12}=1$ $\gamma^3_{12}=0$

$\gamma^1_{13}=0$ $\gamma^2_{13}=0$ $\gamma^3_{13}=1$

$\gamma^1_{22}=0$ $\gamma^2_{22}=0$ $\gamma^3_{22}=1$

$\gamma^1_{23}=1$ $\gamma^2_{23}=0$ $\gamma^3_{23}=0$

$\gamma^1_{33}=0$ $\gamma^2_{33}=1$ $\gamma^3_{33}=0$。

	1	e	e^2
$e_1=1$	1	e	e^2
$e_2=e$	e	e^2	1
$e_3=e^2$	e^2	1	e

如果某一代数具有上述性质的乘法表，但无主单位元，则可进行添加，将它扩张成一种对应的泛复数。今后我们约定$S(e)$中定存在主单位元 1。

定义33 $S(e)$中的范数为

$$\| z \| = M \sum_{i=1}^{n} |x^i| \tag{32}$$

其中

$$M = \mathrm{Max}\left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma^k_{ij}| \right) \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots n)$$

可证上述范数满足巴拿赫代数的要求。

上述定义中的$M=1$时则称$S(e)$是范数归一化的。

定理15 任一有限维泛复数$S(e)$均可将其范数归一化。

证明 设$S(e)$中一组基为e_1，e_2，…，e_n。乘法表如上述。

我们在其中选一组基：$\tilde{e}_i=\frac{1}{M}e_i$，（$i=1$，2，…，$n$）

则新基的乘法表为：

$$\tilde{e}_i\tilde{e}_j=\frac{1}{M^2}e_ie_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{M^2}\gamma_{ij}^k e_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{M}\gamma_{ij}^k\tilde{e}_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\tilde{\gamma}_{ij}^k\tilde{e}_k$$

即有 $\tilde{\gamma}_{ij}^k=\frac{1}{M}\gamma_{ij}^k$

因此

$$\tilde{M}=\mathrm{Max}(\sum_{k=1}^{n}|\tilde{\gamma}_{ij}^k|)=1$$

例2 在三次单位数N_1^3中，由例1的乘法表得：

$$M=\mathrm{Max}(|\gamma_{ij}^1|+|\gamma_{ij}^2|+|\gamma_{ij}^3|)=1$$

因而N_1^3有本身已归一化的范数：

$$\|a\|=\|\alpha+\beta e+\gamma e^2\|=M(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)$$
$$=|\alpha|+|\beta|+|\gamma|.$$

易验证在这样的范数定义下N_1^3满足巴拿赫代数的要求。

关于$S(e)$中的零因子及逆元问题，我们可有一些初步结果：

定理16 $S(e)$中元素$a=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n$为零因子的充要条件是

$$\triangle = \begin{vmatrix} \sum_i \gamma_{i1}^1 \alpha_i & \sum_i \gamma_{i2}^1 \alpha_i & \cdots & \sum_i \gamma_{in}^1 \alpha_i \\ \sum_i \gamma_{i1}^2 \alpha_i & \sum_i \gamma_{i2}^2 \alpha_i & \cdots & \sum_i \gamma_{in}^2 \alpha_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_i \gamma_{i1}^n \alpha_i & \sum_i \gamma_{i2}^n \alpha_i & \cdots & \sum_i \gamma_{in}^n \alpha_i \end{vmatrix} = 0 \qquad (33)$$

其中γ是$S(e)$中的代数结构常数。

证明　a 为零因子的充要条件是方程式

$ab=0$在$S(e)$中存在非零解$b=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\cdots+\beta_n e_n$，将$b$与$a$乘开后，得一组实线性方程组。

$$\sum_{i\,j} \gamma_{ij}^k \alpha_i \beta_j = 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (34)$$

此方程组关于β有解的充要条件即是$\triangle=0$。

显然非零及零因子元a有逆元，因为方程$ax=1$在$\triangle\neq 0$时有解。

在$S(e)$中也可引入内积。即对a，$b\in S(e)$

$a=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n \quad b=\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\cdots+\beta_n e_n$

则内积是

$$(a,\ b)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n \qquad (35)$$

利用内积可定义范数$\|a\|=\sqrt{(a,\ a)}$ $=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2}$但这种范数只能使$S(e)$构成巴拿赫空间，不一定能构成巴拿赫代数。

研究课题12　如何利用代数结构常数来将$S(e)$分类？

猜测5　零因子的“形状”结构决定了有限维泛复数分类的主要性质。

§16 泛复数扩张间的某些关系

泛复数的各种扩张在形式上是有区别的。但在其内涵上是否有一定的关系呢？这里我们找出两个较一般的结果。其中一个是实域扩张与复域扩张的关系，另一个是单元基扩张和多元基扩张的关系。

我们记$S(e)$的分量域于下标，其维数于上标。

定理17 任何一个复域的n维扩张$S_C^n(e)$都是一个实域的$2n$维扩张$S_R^{2n}(e)$。反之则不然。

证明 首先设$S_C^n(e)$的基为e_1，e_2，…，e_n，元素$a=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n$。因它的分量集是复域即$\alpha_k$周历复域，也即$\alpha_k$可为$C$中任一元素。

我们取e_1，e_2，…e_n，ie_1，ie_2，…，ie_n构造一R上的$2n$维空间$S_R^{2n}(e)$。它的元素为

$$a'=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n+\delta_1ie_1+\delta_2ie_2+\cdots+\delta_nie_n$$

其中，β、δ周历实域。

事实上任何一个a均对应一个a'，任何一个a'也可化成一个a。

其次，任意$S_R^{2n}(e)$中不一定能找到一组基

$$e_1,\ e_2,\ \cdots e_n,\ e_{n+1},\ e_{n+2},\ \cdots,\ e_{2n}$$

使它与基

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n,\ ie_1,\ ie_2,\ \cdots,\ ie_n$$

的乘法表全同。下面即是一例证。

例1 双曲抛物数$R(j,\ k)$中，没有元素能满足方程$x^2+1=0$。因此它不能是复域的扩张。若对元素$a=\alpha+\beta j+\gamma k+\delta jk(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in R)$有$a^2+1=0$，即$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta j+$

$2\alpha\gamma k+2(\alpha\delta+\beta\gamma)jk+1=0$

导致 $\alpha^2+\beta^2+1=0$，等，矛盾。

在域的扩张中有一个著名定理说，多次添加不同元素域累次代数扩张，等同于添加某一个元素的单纯代数扩张．在广域和泛复数的扩张中能否还有这一结论呢？我们来分析一下。

设分量域 A 上多元基广域扩张 X 的基为：$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，如果 X 又是 A 的一种单元基扩张，$(1, e, \cdots, e^{n-1})$ 可以是它一组基，将 e 用前面的基表出并进行乘方后，有：

$$\begin{aligned}1&=\alpha_{11}e_1+\alpha_{12}e_2+\cdots+\alpha_{1n}e_n\\ e&=\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2+\cdots+\alpha_{2n}e_n\\ e^2&=\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2+\cdots+\alpha_{3n}e_n\\ &\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ e^{n-1}&=\alpha_{n1}e_1+\alpha_{n2}e_2+\cdots+\alpha_{nn}e_n\end{aligned}\tag{36}$$

定义34 下面的行列式叫做扩张对元基 e 的判别式。

$$\triangle=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}\tag{37}$$

由于 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 可用 $(1, e, e^2, \cdots, e^{n-1})$ 表示的充要条件是 $\triangle\neq 0$，因此我们有

定理18 A上多元基广域代数扩张 $A(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是单元基扩张$A(e)$的充要条件是存在某个元基 e，它的扩张判别式 $\triangle\neq 0$。

例 1 椭圆双曲数是实域添加 i，j 后的多元基扩张．基为 $(1, i, j, ij)$．但它也是一种单元基扩张．因适当选取 e 后，有下面结果

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
e &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i+j) \\
e^2 &= ij \\
e^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)
\end{aligned}
\qquad
\triangle = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0
\end{vmatrix}
$$

$$= 1 \neq 0$$

这种单元基扩张的示性方程就是$e^4+1=0$。

例2 复域上多元基扩张示性方程组为：

$$e_1^2=0,\ e_2^3=0,\ e_1e_2=0.$$

基为 $(1,\ e_1,\ e_2,\ e_2^2)$

我们构造一般的 e，观察它的扩张判别式：

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
e &= \alpha+\beta e_1+\gamma e_2+\delta e_2^2 \\
e^2 &= \alpha^2+2\alpha\beta e_1+2\alpha\gamma e_2+(2\alpha\delta+\gamma^2)e_2^2 \\
e^3 &= \alpha^3+3\alpha^2\beta e_1+3\alpha^2\gamma e_2+(3\alpha^2\delta+3\alpha\gamma^2)e_2^1
\end{aligned}
$$

由于有$\triangle=0$。因此，上述多元基广域代数扩张，不能是某种单元基扩张。

研究课题13 广域多元基扩张是否一定是逐次的累次扩张.

§17 星轭运算

我们在$S(e)$中可引入一种有价值的运算。它在今后建立广义泛复变解析函数理论中，起到了十分重要的作用。

定义35 满足以下条件的运算 *，称为**星轭运算**：对$S(e)$中任意元素a，b有

$a^*\in S(e)$，$b^*\in S(e)$，$\alpha^*=\alpha$ $(\alpha\in R)$

$$(a+b)^*=a^*+b^* \quad (ab)^*=a^*b^* \tag{38}$$

由定义及广域同构的概念，如果星轭运算是一一对应的，那么我们可知$S(e)$中全部元素经一种星轭运算后组成$S^*(e)$同构于$S(e)$。但这不是必然的，如例1中的$*_3$。

星轭运算是一种具有线性和积性分配律的运算，它和共轭概念是相交的，如椭圆复数C中，星轭运算$Z^*=\bar{Z}$也是共轭运算、但三次单位数N_1^3中，$a=\alpha+\beta e+\gamma e^2$共轭运算是

$$\bar{a}=\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \alpha\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\gamma & \beta\\ \alpha & \gamma\end{vmatrix}e+\begin{vmatrix}\beta & \alpha\\ \gamma & \beta\end{vmatrix}e^2$$

而N_1^3的星轭运算却是下面例1中的三种。

例1 三次单位数N_1^3中三种星轭运算定义为：设$a=\alpha+\beta e+\gamma e^2$，

$$\begin{aligned}
&a^{*1}=\alpha+\beta e+\gamma e^2 && \text{（不变）}\\
&a^{*2}=\alpha+\gamma e+\beta e^2 && \text{（交换后两分量）} \qquad (39)\\
&a^{*3}=\alpha+\beta+\gamma && \text{（各分量之和）}
\end{aligned}$$

上述的共轭元不能满足星轭的要求。而这三种运算均可满足。如我们观察$*^2$，设 $\tilde{a}=\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}e+\tilde{\gamma}e^2$

则 $(a+\tilde{a})^{*2}=\alpha+\tilde{\alpha}+(\gamma+\tilde{\gamma})e+(\beta+\tilde{\beta})e^2=a^{*2}+\tilde{a}^{*2}$

$$\begin{aligned}(a\cdot\tilde{a})^{*2}&=\alpha\tilde{\alpha}+\beta\tilde{\gamma}+\gamma\tilde{\beta}+(\alpha\tilde{\gamma}+\beta\tilde{\beta}+\gamma\tilde{\alpha})e\\&\quad+(\alpha\tilde{\beta}+\beta\tilde{\alpha}+\gamma\tilde{\gamma})e^2=a^{*2}\cdot\tilde{a}^{*2}\end{aligned}$$

定义36 对于$S(e)$中星轭运算$*^1$，$*^2$，…，$*^m$，使$\forall a\in S(e)$均存在一组相同的λ_1，λ_2，…$\lambda_m\in R$有

$$\lambda_1a^{*1}+\lambda_2a^{*2}+\cdots+\lambda_ma^{*m}=0 \tag{40}$$

则称$*^1$，$*^2$，…，$*^m$是**线性相关的**，否则称为**线性无关的**。具有m度线性无关星轭运算的$S(e)$，叫做**m度星轭空间**。

例2 例1中N_1^3的三种星轭运算$*^1$，$*^2$，$*^3$是线性无关的。因为，若有λ_1，λ_2，λ_3使

$$\lambda_1 a^{*1}+\lambda_2 a^{*2}+\lambda_3 a^{*3}=0 \qquad (\lambda\in R)$$

则有 $\alpha\lambda_1+\alpha\lambda_2+(\alpha+\beta+\gamma)\lambda_3=0$

$$\beta\lambda_1+\delta\lambda_2=0$$

$$\delta\lambda_1+\beta\lambda_2=0$$

λ的系数行列式不能保证为零，无解。

定理19 n维泛复数$S(e)$最高只能建立n度星轭空间。

证明 $S(e)$中若有$m\geqslant n+1$种星轭运算，$*^1$，$*^2$，…，$*^m$，则由等式

$$\lambda_1 a^{*1}+\lambda_2 a^{*2}+\cdots+\lambda_m a^{*m}=0$$

所得的关于λ的线性方程组的个数$n<m$，因之λ_1，λ_2…，λ_m必有解，也即$*^1$，$*^2$，…，$*^m$是线性相关的。

这样，n维泛复数中最多只有n种线性无关的星轭运算，也即最多只能建立n度星轭空间。

例3 在椭圆双曲数中，元素$a=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij$可定义四种星轭运算：

$$\begin{aligned}a^{*1}&=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij\\a^{*2}&=\alpha-\beta i-\gamma j+\delta ij\\a^{*3}&=\alpha+\beta i-\gamma j-\delta ij\\a^{*4}&=\alpha-\beta i+\gamma j+\delta ij\end{aligned} \qquad (14)$$

因此三次单位数N_1^3和椭圆双曲数$R(i,\ j)$中分别可建立三度和四度以下的星轭空间。

定义37 广域X中的星轭运算如果满足X中的任一元素a有$(a^*)^*=a$，则把$*$叫做对合算子。

例4 椭圆双曲数按例3中定义的四种星轭运算都是对合算子。三次单位数按例1中定义的三种星轭运算中，前两种是对合算子，后一种$*_3$不是对合算子。因为

$$[(\alpha+\beta e+\gamma e^2)^{*3}]^{*3}=(\alpha+\beta+\gamma)^{*3}=\alpha+\beta+\gamma$$

研究课题14　各种具体的泛复数S(e)，它们的星轭运算都应如何定义，各种空间的星轭运算与对合算子个数都能达到空间维数的数量吗？

习　题　四

1　举出两个多元基扩张的例子，其中一个是有限维，另一个是无限维的。

2　在三维调和数H_a^3中计算

$(ae_1+be_2+ce_3)(xe_1+ye_2+ze_3)$

$(xe_1+ye_2+ze_3)^3$

3　在三维波数W^3中计算

$(xe_1+ye_2+ze_3+te_4)^2$

并验证它每一个分量Ui均满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

4　示性方程为$e_1^2=e_2^2+e_3^2$的多元基泛复数的整基数目规律如何？

5　示性方程为$e_1^2+e_2^2=e_3^2+e_4^2$是一种超双曲型数，求出它的一、二、三阶整基。

6　示性方程为$e_1^3=e_2^3$的n阶整基有几个？

7　示性方程为．$e_1^5+e_2^5=0\quad e_3^4=1$的整基形状如何？

8　求出平面复数的代数结构常数．

9　试将双曲抛物数$R(j,k)$的范数归一化．

10　在椭圆双曲数$R(i,j)$中定义范数，并验证在此范数下它构成巴拿赫代数．

11　试定义抛物数P和双曲数H的范数。并分析在此范数意义下，原点的δ邻域，即满足$||z||=||x+y\omega||<\delta$的直观图形是什么？

12　证明由于广域要满足$(ab)c=a(bc)$，因此$S(e)$的代数结构

常数要满足：

$$\sum_{s=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}\gamma_{kl}^{m}=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{il}^{k}\gamma_{jk}^{m}$$

$(i,\ j,\ l,\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

13　证明定义33中$S(\varepsilon)$的范数满足

$$\|ab\| < \|a\|\ \|b\|$$

14　求内积 $(a,\ b)$

① $a=2+e-e^2$　　　$b=5-3e+2e^2$

② $a=2+i-j-5ij$　$b=1-i+2j-ij$

15　试定义四种椭圆抛物数的星轭运算，找出其中的对合算子.

16　验证§17中例1 $*_3$满足三次单位数N_1^3中星轭运算的要求.

17　按§17例3中定义，设$a=1+2i-30j+5ij$写出a^{*1}，a^{*2}，a^{*3}，a^{*4}.并验证 $(a^*)^*=a$.

18　试证椭圆双曲数$R(i,\ j)$在§17定义下

$$|a|_M^4=\Delta=a^{*1}a^{*2}a^{*3}a^{*4}$$

19　试判断椭圆抛物数$R(i\quad k)$ 可否是单元基扩张，如果是，请找出其同构的单元基扩张.

20　对三次单位数N_1^3和四次单位数N_1^4各写出一个与之同构的多元基扩张.

第二章　泛复变函数

在本书中所出现的准解析函数理论的路线从逻辑与美学的观点看来，似乎是自然的。

——L.倍尔斯

本章是前面建立的代数系统中的分析学。它和经典复分析异常相似。而它的重要性已被下一章的初步应用所证实。我感到它应该纳入一般大学教材中。

§18　泛复变函数

本节是泛复函数某些一般概念和性质的描述。为今后使用方便起见而把它放在前面。但读者可先阅读后面的§25及§26。待感兴趣后再以回顾。首先我们了解几个基本概念：

定义38　泛复函空间 X中含一个实变数的点集

$$x = x(t) = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2 + \cdots + x_k(t)e_n \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

若$t_1 \neq t_2$时都有$x(t_1) \neq x(t_2)$则称x为**简单曲线或约当曲线**，又若$x(\alpha) = x(\beta)$，则x称为简单闭曲线，简称闭曲线。当$x_i(t)$连续（$i=1, 2, \cdots, n$），且不为零及零因子时，称x为**光滑曲线**。

类似地，我们称X中含两个、三个…实变数的点集为X中的曲面、体或超曲面等等。

定义39 下面的实积分叫做曲线x的弧长

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\|x'(t)\|dt=\int_{\alpha}^{\beta}\|x_1'(t)e_1+x_2'(t)e_2+\cdots+x_n'(t)e_n\|dt \tag{42}$$

定义40 泛复数空间X的区域G中的每一个点x按照一种规律f在泛复数空间Y的区域D上有点y与之对应，就叫做在G定义了一个泛复变算子f。当$X\simeq Y$时，f称为泛复变函数。记为

$$y=f(x) \quad 及 \quad f: G\subset X\to D\subset Y$$

泛复变函数具有许多与复变函数类似的性质。许多概念也可由复变函数推广到泛复变函数中来。无必要时我们就不做特殊说明，只是借用和移植。例如下面定义中的一些概念，大家都很熟悉。以后本书中把泛复变函数简称为函数。或泛复函。

定义41 函数自变量所在区域G称定义域。点x称原象，y所在区域D称值域。点称为象。f也可叫做映射或变换。

如果一个点x_0只有一个y_0与之对应则称f是单值的；如果一个点x_0有多于一个的y与之对应则称f是多值的。

如果任意两个x_1，x_2（$x_1\neq x_2$）对应的y也不同，则称f是单叶的；如果存在两个或两个以上的点x_1，x_2，$\cdots$（$x_i\neq x_j$，$i\neq j$）对应同一个y_0，则称f是多叶的。单值函数$y=f(x)$又是单叶的，则称$y=f(x)$是一一对应的。

定义42 设x_0是函数$f(x)$定义域G中的点，如果对$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)$使得对$\forall x\in N(x_0,\ \delta)$的元素$x$都有$f(x)\in N(A,\ \varepsilon)$，则称$A$为$x\to x_0$时函数$y=f(x)$的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A。$$

如果函数$y=f(x)$当$x\to x_0$时极限存在，且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称$f(x)$在点x_0连续。

定义43 泛复数空间X中的泛复函$y=f(x)$当$\|\Delta x\|\to 0$时，若有$\|\varepsilon\Delta x\|\|\Delta x\|^{-1}\to 0$，且

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x \qquad (43)$$

其中$f'(x)$存在且唯一，则称函数$f(x)$在点x是可导的或可微的。在x及其邻域可导的函数，叫做在点x是解析的。

上述定义不用Δx去除，因为它可能通过零因子。显然可导必连续。

我们主要是研究一下泛复数空间$S(e)$中的泛复变函数。若$x\in G\subset S(e)$，$y\in D\subset S(e)$，则泛复函$y=f(x)$用基展开可表示成

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$$

$$y=y_1e_1+y_2e_2+\cdots+y_ne_n$$

其中x_1，x_2，…，x_n是n个独立的实变量，而

$y_i=y_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是n元实变函数。

定义44 把y写成$y=y_1e_1+y_2e_2+\cdots+y_ne_n$的过程叫做将$y$进行分蘖．$y_ie_i$叫做$y$的第i个分蘖．而$y_i$叫的$y$第$i$个分量．

猜测6 利用乘法不可交换的广体也可以建立一种分析体系．它也将在实际中得到广泛的应用．

§19 解析泛复函与广义柯西黎曼方程

同复变函数一样，今后我们主要研究解析泛复函。我们

先导出解析函数所应满足的条件．然后再来探讨解析泛复函的一些性质。

由于$y=y(x)=f(x)$是解析的，$y'(x)$存在且唯一．今设x的增量Δx沿轴$x_i e_i$的方向趋向零。即除Δx_i外，其它方向增量$\Delta x_j=0$ $(j\neq i)$ 因而有$\Delta x=\Delta x_i e_i$

$$\Delta y=y'(x)\Delta x_i e_i+\varepsilon\Delta x_i e_i$$

又因x_1，x_2，…，x_n独立，即有

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x_i}=y'(x)e_i$$

所以得：

$$y'(x)e_i e_j=\frac{\partial y}{\partial x_i}e_j=\frac{\partial y}{\partial x_j}e_i \tag{44}$$

$(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

即
$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_i}e_1+\frac{\partial y_2}{\partial x_i}e_2+\cdots+\frac{\partial y_n}{\partial x_i}e_n\right)e_j$$

$$=\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_j}e_1+\frac{\partial y_2}{\partial x_j}e_2+\cdots+\frac{\partial y_n}{\partial x_j}e_n\right)e_i$$

如果$S(e)$中基的乘法表为

$$e_i e_j=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}e_k \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

代入上式，由基的实域线性无关性，可得各分量满足的广义柯西——黎曼Cauchy——Riemann方程组，实的一阶线性偏微分方程组：

$$\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mi}^{k}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}=\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mj}^{k}\frac{\partial y_m}{\partial x_i} \tag{45}$$

$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$

并且自然地会得出如下结果

定理20 泛复数空间$S(e)$中，泛复函解析的必要条件是分量y_m满足方程组(45)。如果分量的全微分存在，则方程组（45）是函数

$$y=y_1e_1+y_2e_2+\cdots+y_ne_n$$

解析的充分条件。

条件充分性的证明可参看文献43.

例 1 广义C—R方程中，令$e_1=1$，$e_2=i$；$x_1=\alpha$，$x_2=\beta$；$y_1=u$，$y_2=v$。由（44）式即可得复变函数中的C—R方程组：

$$u_\alpha=v_\beta \qquad u_\beta=-v_\alpha$$

把（1，i）的代数结构常数写出后由（45）也可得上式。

因此我们把（44）式叫做**泛复形式的广义C—R方程组**。

例 2 试求双曲抛物$R(j, k)$复变函数的广义C—R方程。

解： 设$x=\alpha+\beta j+\gamma k+\delta jk$，$f(x)=P+Qj+Rk+Sjk$由泛复形式的广义$C$—$R$方程（44），可得

$$f_\alpha=f'(x),\ f_\beta=f'(x)j,\ f_\gamma=f'(x)k,\ f_\delta=f'(x)jk.$$

也即 $jf_\alpha=f_\beta$，$kf_\alpha=f_\gamma$，$jkf_\alpha=f_\delta$

$kf_\beta=jf_\gamma$，$kf_\beta=f_\delta$ $\quad jf_\gamma=f_\delta$

将 $f(x)=P+Qj+Rk+Sjk$代入以上诸式，即得：

$$\begin{aligned}&P_\alpha=Q_\beta=R_\gamma=S_\delta\\&Q_\alpha=P_\beta=S_\gamma=R_\delta\\&R_\alpha=S_\beta \quad P_\gamma=Q_\delta=0\\&S_\alpha=R_\beta \quad Q_\gamma=P_\delta=0\end{aligned}\tag{46}$$

泛复函中可以规定一种形式微分算符，当基e非零因

子时为

$$D_{x_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i e_i} + \frac{\partial}{\partial x_j e_j}\right) \tag{47}$$

$$D_{\bar{x}_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i e_i} - \frac{\partial}{\partial x_j e_j}\right)$$

当基为零因子时，我们如下规定也可得相同结果。

$$e_i e_j D_{x_{ij}} = \frac{1}{2}\left(e_j \frac{\partial}{\partial x_i} + e_i \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{48}$$

$$e_i e_j D_{\bar{x}_{ij}} = \frac{1}{2}\left(e_j \frac{\partial}{\partial x_i} - e_i \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

定义45 上述形式微分算符$D_{x_{ij}}$、$D_{\bar{x}_{ij}}$简称为和微算子与差微算子。

为讨论方便今后假定e非零因子。如未加说明，即认为对所有可能下标i、j均成立，这时省略地写成D_x、$D_{\bar{x}}$。当它们作用到泛复函w上时，简记为

$$D_x w(x) = w_x \qquad D_{\bar{x}} w(x) = w_{\bar{x}}$$

由上面的讨论的（43）式和（44）式等可简化为如下三个等式

$$（1）\quad w'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{w(x) - w(x_0)}{x - x_0}$$

$$（2）\quad w_{\bar{x}}(x) = 0 \tag{47}$$

$$（3）\quad w'(x) = w_x(x)$$

并可得结果

定理21 （1）式的存在与连续和等式（2）相同。如果这样，定有（3）式成立。

今后我们将观察到，泛复函的导数，在整体形式上将和实变函数一样，只是它可进行分蘖，得到一组广义$C—R$方程。它的性质也将和实变函数类似。例如大家熟悉的

$$(f+g)'=f'+g'$$

$$(fg)'=f'g+fg'$$

等等。又如解析泛复函$y=f(x)$在点x_0的导数不为零及零因子，那么它的反函数$x=\varphi(y)$在点$y_0=f(x_0)$也是解析的，且有

$$\varphi'(y_0)=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta\varphi\to 0}}\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta\varphi\to 0}}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta\varphi}}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

研究课题15　各种函数解析区域的研究，特别是各种泛复数空间零因子将它分成不连通的空间形式如何？以及它对函数解析性的影响。

§20　高阶导数与族系方程

定理22　$S(e)$上泛复解析函数$f(x)=f_1e+f_2e_2+\cdots+f_ne_n$，如果分量$f_i$均有二阶全微分，则$f(x)$的导数$f'(x)$也是解析的。

证明　观察泛复变函数

$$e_1f'(x)=\varphi_1e_1+\varphi_2e_2+\cdots+\varphi_ne_n=\varphi(x)$$

其中$\varphi_i=\partial f_i/\partial x_1$，$(i=1, 2, \cdots, n)$ e_1为非零因子

因$f(x)$解析，f_i满足

$$\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mi}^{k}\frac{\partial f_m}{\partial x_j}=\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mj}^{k}\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$$

对x_1取偏微商，得：

$$\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mi}^{k}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_m}{\partial x_j}\right)=\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mj}^{k}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)$$

即有
$$\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mi}^{k}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}=\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mj}^{k}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i}$$

由前可知$\varphi(x)$解析。也即$f'(x)$解析。

推论 泛复解析函数各分量存在n阶全微分，则其存在n阶导数。

对于存在n阶导数的泛复函$f(x)$。若$m\leqslant n$，则有

$$\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{p_1}\partial x_1^{p_2}\cdots\partial x_k^{p_k}}=f^{(m)}(x)e_1^{p_1}e_2^{p_2}\cdots e_k^{p_k} \quad (50)$$

因此，高阶导数$f^{(m)}(x)$可由此式求得。并且也存在等式：

$$e_1^{q_1}e_2^{q_2}\cdots e_k^{q_k}\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{p_1}\partial x_1^{p_2}\cdots\partial x_k^{p_k}}$$

$$=e_1^{p_1}e_2^{p_2}\cdots e_k^{p_k}\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{q_1}\partial x_2^{q_2}\cdots\partial x_k^{q_k}} \quad (51)$$

$$(\sum p_i=\sum q_i=m)$$

上述等式将它分蘖后可得到实域上相应的一些偏微分等式。

定义46 方程组（51）称为$f(x)$的泛复形式高阶族系方程组。它的分蘖则称为高阶解析方程组。

例 1 圆锥复数中，$z=x+\omega y$。解析函数$f(z)=u+\omega v$。一个二阶族系方程为：

$$\omega^2\frac{\partial^2 f(z)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(z)}{\partial y^2}$$

即 $\omega^2(U_{x^2}+\omega V_{x^2})=U_{y^2}+\omega V_{y^2}$

可得一种二阶解析方程组

$C \qquad U_{x^2}+U_{y^2}=V_{x^2}+V_{y^2}=0$

$P \qquad U_{y^2}=V_{y^2}=0$

$H \qquad U_{x^2}-U_{y^2}=V_{x^2}-V_{y^2}=0$

一个$4k$阶的族系方程为

$$\omega^{4k}\frac{\partial^{4k}f(z)}{\partial x^{4k}}=\frac{\partial^{4k}f(z)}{\partial y^{4k}} \qquad (k\geq 1)$$

即 $\omega^{4k}(U_{x^{4k}}+\omega V_{x^{4k}})=U_{y^{4k}}+\omega V_{y^{4k}}$

$C \qquad U_{x^{4k}}=U_{y^{4k}},\ V_{x^{4k}}=V_{y^{4k}}$

$P \qquad U_{y^{4k}}=V_{y^{4k}}=0$

$H \qquad U_{x^{4k}}=U_{y^{4k}} \quad V_{x^{4k}}=V_{y^{4k}}$

例 2 三次单位复函中$x=\eta+\zeta e+\xi e^2$，$f(x)=P+Qe+Re^2$由三阶族系方程

$$e^3\frac{\partial^3 f(x)}{\partial\eta^3}=\frac{\partial^3 f(x)}{\partial\zeta^3},\quad e^6\frac{\partial^3 f(x)}{\partial\eta^3}=\frac{\partial^3 f(x)}{\partial\xi^3}$$

得P、Q、R 满足三阶解析方程组

$$U_{\eta^3}=U_{\zeta^3}=U_{\xi^3} \qquad (52)$$

由二阶族系方程组

$$e^2\frac{\partial^2 f(x)}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial\zeta^2},\quad e^4\frac{\partial^2 f(x)}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial\xi^2}$$

得 $e^2(P_{\eta^2}+eQ_{\eta^2}+e^2R_{\eta^2})=P_{\zeta^2}+eQ_{\zeta^2}+e^2R_{\zeta^2}$ 等

由此 $P_{\eta^2}=R_{\zeta^2} \quad Q_{\eta^2}=P_{\zeta^2} \quad R_{\eta^2}=Q_{\zeta^2}$ 等

可得 $\Delta P=\Delta Q=\Delta R \qquad (53)$

其中 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial\eta^2}$

例 3 椭圆双曲复函中$x=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij$, $f(x)=P+Qi+Rj+Sij$，有4阶族系方程

$$\frac{\partial^4 f(x)}{\partial\alpha^4}=\frac{\partial^4 f(x)}{\partial(\beta i)^4}=\frac{\partial^4 f(x)}{\partial(\gamma j)^4}=\frac{\partial^4 f(x)}{\partial(\delta ij)^4}$$

可得P、Q、R、S均满足

$$U_{\alpha^4}=U_{\beta^4}=U_{\gamma^4}=U_{\delta_4} \tag{54}$$

高阶解析方程的深入研究必将为我们解决高阶偏微分方程问题带来方便。但是否象复函一样解析函数总可以取导呢？这是一个较复杂的问题。我们现在只能有如下的猜测。为简便起见，如无特殊说明今后本书提及的函数均为解析的并认为是无穷可微的。

猜测 7 除实函外，其它泛复解析函数在解析区域内一定无穷可微。

§21 泛复函的积分

这一节讨论泛复函的线积分，它类似于实函的黎曼积分。

定义47 将泛复数空间$S(e)$中的约当曲线c分成n段后，各段近似为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ ($i=1, 2, \cdots, n$) 作和式并取极限。如果这个极限存在则叫做泛复函沿c从x_0到x_n的积分。记为

$$\int_{x_0 \atop c}^{x_n} f(x)dx=\lim_{\substack{n\to\infty \\ M\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \tag{55}$$

$$(M=max\|\Delta x_i\|)$$

易知泛复函的积分遵守一般积分的运算法则。例如大家

熟悉的

（1） $\int_C \alpha f(x)dx = \alpha \int_c f(x)dx$ （α为常数）

（2） $\int_c [f(x)+g(x)]dx = \int_c f(x)dx + \int_c g(x)dx$

（3） $\int_{C-} f(x)dx = -\int_c f(x)dx$

（4） $\left\| \int_c f(x)dx \right\| \leqslant MS$

（其中S为c的弧长　$M = Sup\|\|f(x)\|\|$）

定理23　如果泛复函$f(x)$是泛复数空间$S(e)$中单连通区域D里的解析函数，c是D中一条约当闭曲线，则沿c的积分

$$\oint_C f(x)dx = 0 \qquad (56)$$

证明　$\int_C f(x)dx = \int_C (f_1e_1 + f_2e_2 + \cdots + f_ne_n)d(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n)$

$$= e_1\int_C \varphi_{11}dx_1 + \varphi_{21}dx_2 + \cdots + \varphi_{n1}dx_n$$

$$+ e_2\int_C \gamma_{12}dx_1 + \varphi_{22}dx_2 + \cdots + \varphi_{n2}dx_n$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ e_n\int_C \varphi_{1n}dx_1 + \varphi_{2n}dx_2 + \cdots + \varphi_{nn}dx_n$$

其中

$$\varphi_{ik}=\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mj}^{k}\ f_m$$

由（45）得 $$\frac{\partial\varphi_{jk}}{\partial x_i}=\frac{\partial\varphi_{ik}}{\partial x_j}$$

即分蘖的各实线积分为全微分的积分，因此它们的闭路积分均为零。

推论 $S(e)$中单连通区域内，解析泛复函的积分与路径无关。即积分

$$\int_{c\ x_0}^{x_*} f(x)dx$$

是x_0、x_*的点函数。

例1 双曲（H）复函中，通过连接（0、0）（1，j）的直线c_1和通过（0、0），（1，0），（1，j）的析线c_2，计算积分$\int e^z dz$。

解 $$\int_{c_1} e^z d_1=\int_{c_1} e^{x+jy}d(x+jy)$$

$$=\int_{c_1} e^x(\text{ch}y+j\text{sh}y)d(x+jy)$$

$$=\int_{c_1} e^x\text{ch}ydx+e_x\text{sh}ydy+j\int_{c_1} e^x\text{sh}ydx+e^x\text{ch}ydy$$

$$=\frac{e^2-1}{2}(1+j)$$

同理可得 $$\int_{c_2} e^z dz+\int_{c_2} e^z dz=-\frac{e^2-1}{2}(1+j)$$

这一例子也验证了定理23及其推论．其它更多的实例

读者可自行举出.

定理24 若$f(x)$在区域D内解析，且

$$g(x)=\int_a^x f(x)dx$$

则$g(x)$仍是解析的，且$g'(x)=f(x)$

证明 设$\Delta x=x-x_0$（x_0，$x\in D$），因$f(x)$解析，当$\|\Delta x\|$充分小时$\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$，又因

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)dx=f(x_0)\Delta x$$

所以

$$\left\|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}[f(x)-f(x_0)]dx\right\|<\left\|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\varepsilon dx\right\|=\varepsilon\|\Delta x\|$$

得 $$\left\|[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)]-f(x_0)\ \Delta x\right\|<\varepsilon\|\Delta x\|$$

即当$\|\Delta x\|$沿任何路径趋于零时，有极限

$$g'(x_0)=f(x_0)$$

当x_0在D内变动时，有 $g'(x)=f(x)$

定义48 若$g'(x)=f(x)$则称$g(x)$为$f(x)$的原函数．记为

$$g(x)=\int f(x)dx=\int_a^x f(x)dx+C \tag{57}$$

C为常数.

定理25 设$F(x)$是D中解析泛复函$f(x)$的原函数，则存在广义牛顿——莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \tag{58}$$

证明 由（57）式

$$F(b)-F(a)=\left(\int_a^b f(x)dx+c\right)-\left(\int_a^a f(x)dx+c\right)$$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

类似实积分，泛复函也有分部积分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

由于导数在形式上与实域中样子完全相同。那么原函数也和实域的结果一样有着相同形式。

例 2 在正交数中验证$\int x^2dx$结果与实域中形式相同。

验证 $\int x^2dx=\int(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)^2d(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)$

$$=\int x_1^2dx_1e^1+x_2^2dx_2e_2+\cdots+x_n^2dx_ne_n$$

$$=\frac{1}{3}(x_1^3e_1+x_2^3e_2+\cdots+x_n^3e_n)$$

$$=\frac{1}{3}x^3$$

例 3 用牛顿莱布尼兹公式计算例 1 的结果。

解 $\int_c e^z dz=\int_0^{1+j}e^z dz=e^z\Big|_0^{1+j}=e^{1+j}-1$

$$=c(\mathrm{ch}1+j\mathrm{sh}1)-1=\frac{1}{2}(e^2-1)(1+j)$$

研究课题16　各种泛复函在什么情况下定理23的结果受到破坏？这样一些特殊状态深入研究后，其结果的应用.

§22　形式初等函数（Ⅰ）

在实变初等函数中，如果我们把自变量换成泛复数X中的变量$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$那么我们就得到泛复变函数中的“形式初等函数”．本书后面简称为初等函数.

幂函数　$y=f(x)=x^m$（m为自然数）将幂函数分蘖，即写成

$$y=y_1e_1+y_2e_2+\cdots+y_ne_n$$

则称分量y_i（$i=1, 2, \cdots, n$）为m阶整函数．它们都是独立实变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的多项式，其次数$\leqslant m$.

例1　双调和数函数中二次幂函数，利用示性方程

$e^4+2e^2+1=0$可得：

$$\begin{aligned}y=x^2&=(x_1+x_2e+x_3e^2+x_4e^3)^2\\&=(x_1^2-2x_2x_4-x_3^2+2x_4^2)\\&\quad+e(2x_1x_2-2x_3x_4)\\&\quad+e^2(2x_1x_3-4x_2x_4+x_2^2-2x_3^2+3x_4^2)\\&\quad+e^3(2x_1x_4+2x_2x_3-4x_3x_4).\end{aligned}$$

例2　三维调和数H_a^3的示性方程为

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=0$$

变量：　　$x=\eta e_1+\zeta e_2+\xi e_3$

n次幂函数：$y=f(x)=x^n=y_1\omega_1+y_2\omega_2+\cdots+y_{2n+1}\omega_{2n+1}$

它的每一分量y_i（$i=1, 2, \cdots, 2n+1$）都是η, ζ, ξ的多

项式，即所谓n阶球函数。其基为

$$\omega_1=e_1^n,\ \omega_2=e_1^{n-1}e_2,\ \omega_3=e_1^{n-1}e_2e_3,\ \cdots,$$

$\omega_{2n+1}=e_2^{n-1}e_3$。这样$f(x)=x^n$成了三维空间到$2n+1$维空间的一种映射。

例如，$y=x^3=(\eta e_1+\zeta e_2+\xi e_3)^3=(\eta^3-3\eta\xi^2)e_1^3$

$+(3\eta\zeta^2-3\eta\xi^2)e_1e_2^2+(3\eta^2\zeta-3\zeta\xi^2)e_1^2e_2$

$+(\zeta^3-3\zeta\xi^2)e_2^3+(3\eta^2\xi-\xi^3)e_1^2e_3+(3\zeta^2\xi-\xi^3)e_2^2e_3$

$+6\eta\zeta\xi e_1e_2e_3$

关于幂函数例子很多，读者可自行列举。它的性质也类似实函。例如$(x^m)'=mx^{m-1}$，在整个空间是解析的，等等。读者可验算之。

多项式函数$y=f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$

我们同样可将多项式函数分蘖，每一分量也都是实多项式。

定义49 首项系数a_0不为零因子的多项式称为**正则的**。a_0为零因子时称为**奇异的**。

多项式带余式的除法。

设 $g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$

当b_0不为零因子即$g(x)$正则时，可进行除法，即可有

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

例3 在双曲复函中$(jx^2+1)\div(x+j)$可有

$$jx^2+1=(x+j)(jx-1)+(1+j)$$

但 $(jx^2+1)\div[(1-j)x+1]$却不可进行。

多项式函数在整个空间都是解析的。它的零点分布可能是连续的，即根的个数较为复杂。

有理函数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\cdots+b_k}$

上式中的分母$g(x)$应为正则多项式。而y的正则或奇异则与分子$f(x)$相同。

定义50　如果泛复解析函数y在点a的值不存在，则称a为y的奇点。

显然多项式$g(x)$的零点与零因子点都是y的奇点。从后面的结果可知奇点的形式一般为泛复数中零因子集平移后的集合。

例4　在椭圆抛物数$R(i, k)$中，求有理函数$y=\dfrac{1}{ax}$的奇点。

解　a非零因子，否则整个$R(i, k)$空间均为奇点，函数无定义域。

另设$x=\alpha+\beta i+\gamma k+\delta ik$，则当$\alpha=\beta=0$时，$ax$为零因子，也即的奇点集。

有理函数在泛复数是有限维时，它也可进行分蘖，且每个量均为实有理函数。在泛复数是无限维时，分蘖后将成为一种级数状态。

研究课题17　不同种类泛复数中各种多项式零点的规律，零因子点的规律，因式分解的规律，以及奇异多项式及有理函数的有关规律.

§23　级　　数

我们可以完全象实数一样，类似地在泛复数中引入常数项级数，函数项级数以及幂级数等概念.它们许多性质也都可以沿用实变函数中的结果．只是要把绝对值$|\cdot|$换成范数$\|\cdot\|$即可．例如各种级数形式

常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 \cdots$

函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + \cdots$$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$

对于级数的收敛，例如对上述幂级数在点x_0的收敛，是指下列极限存在

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{n=1}^{K} a_n x_0^n$$

而在x_0极限

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{n=1}^{K} \|a_n x_0^n\|$$

存在则称幂级数在x_0是按范数收敛的，同样我们也可将一致收敛概念推广到泛复数空间中的一个区域上。对按范数收敛与一致收敛的级数也是有实级数类似的一些性质等等，从略。

对于收敛判别法，也有类似的一些准则。例如对于幂级数，若极限

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}$$

存在则它在超球$\|x\| < R = \frac{1}{l}$内一致收敛。

例 1　在超球$\|x\| < 1$内，有

$$S(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1 + x^2}.$$

泰勒级数

对于解析泛复函我们同样可导出泰勒级数，设泛复函$f(x)$在泛复数空间X中区域G中点a邻域内存在无穷阶导数，那么

设 $f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+\cdots$

则

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\cdots$$

$$f''(x)=2a_2+6a_3(x-a)+12a_4(x-a)^2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!\ a_n+(n+1)!\ a_{n+1}(x-a)+\cdots\cdots$$

令 $x=a$得

$$a_0=f(a),a_1=f'(a),a_2=\frac{f''(a)}{2!}\cdots,a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ \cdots$$

因此$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$

$$+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \quad (59)$$

由前面的猜测，我们推断泛复解析函数均可展成泰勒级数。但这猜测尚未证明，因此将在点x及其邻域可展成泰勒级数的泛复函叫做在点x的强解析函数。若未加说明，本书今后讨论的解析函数均为强解析函数。

罗朗级数

在泛复函中，我们同样可以引入罗朗级数。它的一般形式为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \quad (60)$$

它的两部份，即$n\geqslant 0$部分叫做正则部分。正则部分在超球$\|x-x_0\|<R$内按范数收敛。另一部分$n<0$部分叫主要部

分。主要部分在超球$\|x-x_0\|>r$外按范数收敛。则罗朗级数(60)在超环 $r<\|x-x_0\|<R$上绝对收敛。

例 2 双曲平面 H上，我们按范数

$\|z\|=\|x+jy\|=|x|+|y|$

则在方形域$\|z\|=|x|+|y|<3$内有展开式

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\frac{z^3}{3^3}+\cdots\cdots\right)$$

而在方形域$\|z\|=|x|+|y|>2$外有展开式

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\frac{2^3}{z^3}+\cdots\right)$$

因此我们在方环形 $2<\|z\|=|x|+|y|<3$ 内有罗朗展开式

$$\frac{1}{(z-3)(z-2)}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

在泛复函中也可象实函和复函一样建立其他形式的一些函数项级数。如三角级数及其他正交函数所形成的级数等。它们的形式与性质也都类似于实函与复函，但更丰富。

猜测 8 泛复函泰勒公式的余项将具有与函相同的形式。

§ 24 形式初等函数(II)

指数函数

我们定义下列级数的和函数为指数函数。

$$y=e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+\cdots$$

利用级数的性质可以导得它也有许多与实变指数函数相同的性质，例如

$e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$，$(e^{x})^{K}=e^{Kx}$，$e^{0}=1$。　　等等

如果把指数函数分蘖，将得到一类**广义欧拉公式**。

若　$x=x_1e+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$，

则　$e^{x}=E_1e_1+E_2e_2+\cdots+E_1e_n$。

其中$E_i=E_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$为实函。

例1　四次单位数N_1^4中泛复变数为

$$x=\alpha+\beta\omega+\gamma\omega^{2}+\delta\omega^{3}$$

其元基ω示性方程$\omega^{4}=1$。广义欧拉公式为

$$e^{x}=E_1+E_2\omega+E_3\omega^{2}-E_4\omega^{3}$$

如设$\zeta\subset R$，则还可有

$$e^{\zeta\omega}=\widetilde{E}_1(\zeta)+\omega\widetilde{E}_2(\zeta)+\omega^{2}\widetilde{E}_3(\zeta)+\omega^{3}\widetilde{E}_4(\zeta)$$

其中$\widetilde{E}$叫做四阶指数函数。这四个四阶指数函数含一些有趣的性质。例如，由

$$e^{-\zeta\omega}=\widetilde{E}_1(\zeta)-\omega\widetilde{E}_2(\zeta)+\omega^{2}\widetilde{E}_3(\zeta)-\omega^{3}\widetilde{E}_4(\zeta)$$

因为　$e^{\zeta\omega}e^{-\zeta\omega}=e^{0}=1$

可得　$[\widetilde{E}_1(\zeta)+\omega^{2}\widetilde{E}_3(\zeta)]^{2}-[\omega\widetilde{E}_2(\zeta)+\omega^{3}\widetilde{E}_4(\zeta)]^{2}=1$

由此 $$E_1^2(\zeta)-2\widetilde{E}_2(\zeta)\widetilde{E}_4(\zeta)+\widetilde{E}_3^2(\zeta)=1$$

$$\widetilde{E}_2^2(\xi)-2\widetilde{E}_1(\zeta)\widetilde{E}_3(\xi)+\widetilde{E}_4^2(\zeta)=0$$

上述等式对任意泛复数ζ也成立。并且由$(e^{\zeta\omega})'=we^{\zeta\omega}$，可得

$$\widetilde{E}_4^{(4)}(\zeta)=\widetilde{E}_3^{(3)}(\zeta)=\widetilde{E}_2''(\zeta)=\widetilde{E}_1'(\zeta)=\widetilde{E}_4(\zeta)$$

等等。

指数函数也有广义隶莫弗公式：

$$\begin{aligned}e^{Kx}&=E_1(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)e_1\\&+E_2(kx_1, kx_2, \cdots, kn_n)e_2\\&+\cdots\cdots\\&+E_n(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)e_n.\end{aligned}$$

以及其它实指数函数的性质。但在不同的泛复数中其周期状态不同。

例2 在平面椭圆复函C中，有单周期$2\pi i$，

即 $$e^{\zeta+2n\pi i}=e^{\zeta}$$

但在椭圆双曲复函R (i, j) 中，有双周期$2\pi i$和$2\pi ij$

即 $$e^{\zeta+2n\pi i}=e^{\zeta+2n\pi ij}=e^{\zeta}$$

指数函数有时还可有多周期等。但一般有椭圆性的周期，即周期中存在元素i，使$i^2+1=0$。

三角函数

我们用级数定义正、余弦函数为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

存在椭圆性基的泛复数中，我们可得到三角函数与指数

函数的关系是

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

即有欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

我们也可导出各种熟悉的三角函数关系式，及定义其他三角函数等。例如

$$\sin x^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

$$\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$$

等等。而且可得它们和四阶指数函数的关系是

$$\sin x = \widetilde{E}_2(x) - \widetilde{E}_4(x)$$

$$\cos x = \widetilde{E}_1(x) - \widetilde{E}_3(x)$$

例 3 三阶微量数N_0^3中，即变量$x = \alpha + \beta e + \gamma e^2$（其中$e^3 = 0$）的正弦函数由和角公式及级数展开可得

$$\sin x = \sin(\alpha + \beta e + \gamma e^2)$$

$$= \sin\alpha\cos(\beta e + \gamma e^2) + \cos\alpha\sin(\beta e + \gamma e^2)$$

$$= \sin\alpha\left[1 - \frac{(\beta e + \gamma e^2)^2}{2!}\right] + \cos\alpha(\beta e + \gamma e^2)$$

$$= \sin\alpha + e\beta\cos\alpha + e^2\left(\gamma\cos\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\sin\alpha\right).$$

三角函数在不同的泛复数中，周期也不一样，如实域中2π为周期。而平面双曲数中有双周期2π和$2\pi j$。也有多周期，但它的周期一般是双曲型周期。即周期中存在元素j，使$j^2 - 1 = 0$。

双曲函数

同样，我们用级数来定义双曲正弦和双曲余弦：

$$\mathrm{sh}x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\mathrm{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

可用指数函数来表达双曲函数。存在双曲性基的泛复函表达形式更多样。

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{jx} + e^{-xj}}{2}$$

也有广义的欧拉公式

$$e^{jx} = \mathrm{ch}x + j\mathrm{sh}x$$

许多实关系仍然成立。如

$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$，　$(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$，$(\mathrm{sh}y)' = \mathrm{ch}x$ 等等。

它们与四阶指数函数的关系是

$$\mathrm{ch}x = \widetilde{E}_1(x) + \widetilde{E}_3(x)$$

$$\mathrm{sh}x = \widetilde{E}_2(x) + \widetilde{E}_4(x)$$

双曲函数一般有椭圆性周期。

根式函数

根式函数$y = f(x) = \sqrt[n]{x}$是由$y^n = x$所得出的它是幂函数的反函数。

由于某些泛复数中，y^n的值域不一定是全体泛复数，因而根式函数定义域常有限制。另一面又可能多个y使$y^n = x$，因此根式函数可能是多值的。

例 4　平面双曲复数H中，由于

$$(\alpha+\beta j)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta j$$

因此函数$W=\sqrt{z}$定义域要求$Rez\geqslant 0$。即H 平面的右半平面。

例 5　在椭圆双曲泛复数$R(i, j)$中，$y=\sqrt{x}=\sqrt{\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij}$有四个值。

$$y=\sqrt{x}=\pm[P+Q+i(R+S)]\pm j[P-Q+i(R-S)]$$

其中

$$
\begin{aligned}
P&=\frac{\sqrt{2}}{4}\{[(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2]^{\frac{1}{2}}+(\alpha+\gamma)\}^{\frac{1}{2}}\\
Q&=\frac{\sqrt{2}}{4}\{[(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2]^{\frac{1}{2}}+(\alpha-\gamma)\}^{\frac{1}{2}}\\
R&=\frac{\sqrt{2}}{4}\{[(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2]^{\frac{1}{2}}-(\alpha+\gamma)\}^{\frac{1}{2}}\\
S&=\frac{\sqrt{2}}{4}\{[(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2]^{\frac{1}{2}}-(\alpha-\gamma)\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\qquad (62)
$$

上述结果，是从解$y^2=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij$的方程组得出。读者可自行练习计算。

根式函数一般情况下看成分指数的幂函数运算起来较为方便。

对数函数

作为指数函数$e^y=x$的反函数$y=Lnx$称为对数函数

对不同的泛复数来说，它非但有不同的定义域规定，也有多值与单值等差异。

例 6　圆锥复数C、P、H中，$z=x+iy$，$z=x+yk$，$z=x+yj$。则

$$w = Lnz = \begin{cases} \ln|z| + i\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2n\pi\right) & z \in C \\ \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) & \\ \ln|x| + \dfrac{y}{|x|}k & z \in P \\ \ln|z|_M + j\operatorname{arth}\dfrac{y}{x} & z \in H \end{cases}$$

这是由$e^{u+\omega v} = x + y\omega$解得的.例如$H$中　由$e^{u+vj} = x + yj$可得$e^u \operatorname{ch} v = x$，$e^u \operatorname{sh} v = y$。因此。$u = \ln|z|_M$，$v = \operatorname{arth}\dfrac{y}{x}$。

有的泛复数的指数函数较为复杂，因此它们的对数函数展成分蘖就较为困难。这里就可能得出一些新的函数形式。

反三角函数

正弦、余弦函数$x = \sin y, x = \cos y$的反函数$y = \operatorname{Arcsin} x$，$y = \operatorname{Arccos} x$

分别称为反正弦、反余弦函数。

由于三角函数是周期函数，所以它们的反函数是多值函数。

在具有椭圆基的泛复数中，反三角函数与对数函数是有联系的。因为由

$$x = \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \qquad x = \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

可解得

$$y = \operatorname{Arcsin} x = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(ix + \sqrt{1 - x^2}\right)$$

$$y = \operatorname{Arccos} x = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

同理可得反正切、反余切为

$$y = \text{Arc tg}\, x = \frac{1}{2i}\,\text{Ln}\left(\frac{1+ix}{1-i}\right)$$

$$y = \text{Arcctg}\, x = \frac{1}{2i}\,\text{Ln}\left(\frac{x+i}{x-i}\right)$$

例 7 试求平面双曲复函H的反正弦函数 $w = u + jv = \text{Arcsin}\, z = \text{Arcsin}(x + jy)$的分量。$u$、$v$，

解 $x + jy = \sin(u + jv) = \sin u \cos v + j\cos u \sin v$

$\sin u \cos v = x$, $\cos u \sin v = y$

可解得 $u = \text{Arcsin}\ (\eta + \xi)$, $v = \text{Arccos}\ (\eta - \xi)$

其中 $\eta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(1-x)^2 - y^2}$ $\xi = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(1-x)^2 - y^2}$

因之 $w = \text{Arcsin}(x + jy)$

$= \text{Arcsin}\ (\eta + \xi)\ + j\text{Arccos}\ (\eta - \xi)$

对不同泛复的反三角函数也可规定自己的主值，以便成为单值函数。

研究课题18 不同泛复数的各种形式初等函数性质的研究．这些函数性质被了解将对其它科学研究起较大的帮助作用．如圆内整点数即是双曲复函正弦函数$w = \sin\pi\ (x + jy)$ 圆内零点个数等．

习　题　五

1 三次单位数N_1^3中，设$x = \alpha + \beta e + \gamma e^2$

试求 $f(x) = x^3$的各分蘖．

2 椭圆双曲$R(i, j)$复函中，求奇异多项式$f(x) = (i + ij)x^3 -$

x^2+1-j与$g(x)=jx+1$的带余式除法$f(x)=q(x)g(x)+\gamma(x)$中的商$q(x)$及余式$\gamma(x)$它们是奇异的还是正则的？

3　三次单位数N_1^3中，函数$y=\dfrac{1}{x-1}$，其中$x=\alpha+\beta e+\gamma e^2$的定义域应如何？

4　求三阶微量数N_0^3中，有理函数$y=\dfrac{1}{ax}$的奇点集．其中$x=\eta+\zeta\omega+\xi\omega^2$. $\omega^3=0$.

5　二维波数W^2示性方程可写成$e_1^2+e_2^2=e_3^2$因而有几个线性无关的n次二维波动多项式．

6　在正交数中，求
$(x_1e_1+x_2e_2+\cdots x_ne_n)^m$及$exp(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)$的分蘖。

7　三维波数$W^3(e_1^2+e_2^2+e_3^2=a^2e_4^2)$试算出$f(x)=x^2$的分蘖．

8　三维波数W^3中，证明$\varphi(x)=x^n$有$(n+1)^2$个线性无关分量．

9　将函数$y=\ln(1+x)$展成幂级数。它在n阶正交数中形式如何？

10　试将N_1^3中$y=\dfrac{2}{(x-5)(x-3)}$在点$x=2+e+e^2$邻域展成罗朗级数．

11　若以示性方程$\omega^2-\omega=0$构成2维数、试求变量$z=x+y\omega$指数函数的广义欧拉公式．

12　利用双曲复数的广义欧拉公式．
$e^{jx}=\mathrm{ch}x+j\mathrm{sh}x$，导出$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$

13　三次单位数$(\omega^3=1)$中，证明
$e^{\omega x}=E_1(x)+E_2(x)\omega+E_3(x)\omega^2$

则　$E_1(x)=\dfrac{1}{3}e^x+\dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

$$E_2(x)=\frac{1}{3}e^{x}-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\frac{3}{3}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$E_3(x)=\frac{1}{3}e^{x}-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\sqrt{\frac{3}{2}}x-\sqrt{\frac{3}{3}}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

14　试求$\sin(x+ky)$，$\cos(x+jy)$，($j^2=1$，$k^2=0$）的各分蘖。

15　试将$\mathrm{sh}(x+iy)$，$\mathrm{ch}(x+ky)$进行分蘖。

16　在三阶微量数中N_0^3，将$\cos(\alpha+\beta e+\gamma e^2)$进行分蘖。

17　抛物复函中，分$\arcsin(x+ky)$，$\mathrm{arth}(x+ky)$。

18　试求$\mathrm{Ln}(1+i)$，$\mathrm{Ln}(1+j)$，$\mathrm{Ln}(1+k)$的值.

19　双曲抛物数$R(j,k)$中，将根式函数

$y=\sqrt{x}=\sqrt{\alpha+\beta j+\gamma k+\delta jk}$ 分蘖。

§25　平面泛复函

用平面泛复数为变量，即令$z=x+y\omega$，其中ω代表C、P、H的基i，k，j．得到一般的平面泛复变函数：

$$w=f(z)=u(x,y)+\omega v(x,y)$$

当$\omega=i$时，为椭圆复函，就是现今研究已经十分深入的复变函数理论。当$\omega=k$时叫做抛物复函．$\omega=j$时叫做双曲复函。对解析函数，我们有一阶导数关系：

$$\omega f'(z)=\omega\frac{\partial(u+\omega v)}{\partial x}=\frac{\partial(u+\omega v)}{\partial y}\qquad(63)$$

因此，$f(z)$分别在C、P、H平面上区域D内解析的充分必要条件是u，v在D内可微，且满足广义柯西—黎曼方程：

$z\in C$　　　　　$z\in P$　　　　　$z\in H$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = v_x \end{cases} \qquad (64)$$

第一式就是大家熟悉的$C—R$方程。如果利用圆加可把三式写成统一的形式：

$$\begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ u_y \oplus v_x = 0 \end{cases} \qquad (65)$$

将上两式分别对x和y取偏导，就可得到平面解析泛复函的实部和虚部均满足方程

$$u_{y^2} \oplus u_{x^2} = 0 \qquad v_{y^2} \oplus v_{x^2} = 0$$

定义51 把同一解析平面泛复函中的实部u和虚部v叫做共轭函数．椭圆复函中叫共轭调和函数．双曲复函中叫共轭波函数．

椭圆复函中共轭调和函数是可以相互表出的。在双曲复函中由于$v_x dx + v_y dy = u_y dx + u_x dy$是全微分。因此它们也可互相表出。

$$v = \int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} u_y dx + u_x dy$$

$$u = \int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} v_y dx + v_x dy$$

而在抛物复函中，我们由u中不含y可导得：

$$u = \varphi(x), \qquad v = \varphi'(x) y + \phi(x)$$

其中$\varphi(x)$，$\phi(x)$是x的任一可微实函．u、v间的关系是明显的。

解析平面泛复函$f(z)$分别沿平面C、P、H上曲线C的积分

$$\int_c f(z)dz = \int_c (u+\omega v)d(x+\omega y)$$

$$= \int_c udx - ⊕vdy + \omega\int_c vdx + udy \qquad (66)$$

由（65）可知它们都与路径无关。只与起点和终点有关。因此在解析的单连通区域闭曲线 C 上：

$$\int_C f(z)dz = 0 \qquad (67)$$

椭圆复函的奇点所产生的留数理论成为复函积分的奇峰异景。在其它的平面复函中是否也能发展这种理论呢？现阶段仅能作出一定猜测和作为一个课题来研究。

研究课题19　各种平面复函的积分奇异情况及其应用。

猜测9　按通常椭圆复函的形式，抛物复函与双曲复函中不存在留数。但如果深入分析与重新定义P与H平面的拓扑结构，如广义黎曼面，"闭"曲线，"内"和"外"，等等，可能得到留数。上述留数可能产生在原函数是多值函数的积分中。

积分的正常情况较为清楚。读者可自行举例验算。但积分的奇异情况如研究课题与猜测中所提较为复杂。为帮助大家研究这一问题，下面我们分析两个例子，供读者观察、研究。

例1　抛物平面P上分析$\oint_c \frac{1}{z}dz$。其中C为单位圆。

解　设　$z = x + ly = \cos\theta + k\sin\theta$，

则　$$\oint \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin\theta + k\cos}{\cos\theta + k\sin\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\cos\theta\sin\theta + k}{\cos^2\theta} d\theta$$

这是一瑕积分，在$\frac{\pi}{2}$与$\frac{3\pi}{2}$处是发散的。由于分母在这

两处通过零因子$\pm k$从而使被积函数两次通过奇点，而且圆内含一奇点集。λk（$|\lambda|<1$）。

例2 双曲平面H上，分析积分$\oint_c \frac{1}{\sqrt{2-z^2}}dz$。

其中c为单位圆。

解 设 $z=x+jy=\cos\theta+j\sin\theta$

则
$$\oint_c \frac{dz}{\sqrt{2-z^2}}=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin\theta+j\cos\theta}{\sqrt{1-2j\sin\theta\cos\theta}}d\theta$$

由于平方根在双曲复数H中的多值性，被积函数可能为四个值± 1和$\pm j$。因此积分可能出现四个值$\pm 2\pi$。和$\pm 2\pi j$，如果对平方根给出相应的条件要求，也可得出其它结果。

这一奇异现象主要是积分路线通过了四个奇点

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)\text{ 和 }\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)$$

从上两例可看出，各种平面上的区限在讨论问题中起作十分重要的作用。分特定区限讨论问题，将给问题带来简便，而区限边界的性质都在问题中起关键性的作用。

§26 三维与四维泛复函

复函向高维发展是数理科学家们长期追求的目标，在此漫长的过程中出现了众多卓越的理论，且有了许多重要的用途，这里引进的一些高维结果依我浅见，除了作为一般工具十分重要以外，很可能成为我们这个世界结构与规律的一个映象。

三次单位泛复函

利用三次单位数N_1^3中的变量$x=\zeta+\eta e+\xi e^2$构成空间的一种泛复函

$$f(x)=P+Qe+Re^2$$

其解析函数的导数是

$$f'(x)=\frac{\partial f}{\partial\zeta}=\frac{\partial f}{e\partial\eta}=\frac{\partial f}{e^2\partial\xi} \tag{68}$$

由三次单位数法则$e^3=1$乘开后对照各分量，可得广义$C—R$方程组。

$$\begin{aligned} P_\zeta&=Q_\eta=R_\xi\\ Q_\zeta&=R_\eta=P_\xi\\ R_\zeta&=P_\eta=Q_\xi \end{aligned} \tag{69}$$

从上式可导出高阶族系方程：

$$\Delta P=\Delta Q=\Delta R$$

其中

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$$

因此P、Q、R任两者之差都是三维调和函数。另外从（69）还可导出任一P、Q、R均满足 $u_{\xi^3}=u_{\eta^3}=u_{\zeta^3}$

在三次单位泛复函中可定义积分

$$\int_c f(x)dx=\int_c(P+Qe+Re^2)d(\zeta+\eta e+\xi e^2)$$

$$=\int_c Pd\zeta+Rd\eta+Qd\xi+e\int_c Qd\zeta+Pd\eta+Rd\xi$$

$$+e^2\int_c Rd\zeta+Qd\eta+Pd\xi$$

其中c为空间N_1^3中的曲线。

由（69）式可知，当c为约当曲线时，积分与路径无关，且有闭路积分

$$\oint_c f(x)dx = 0$$

因此矢量场（P、R、Q），（Q，P、R），（R，Q，P）为共轭形式的位势场。

椭圆双曲泛复函

在四维的椭圆双曲数空间$R(i、j)$引入变量，$x=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij$，可构成解析函数

$$f(x)=P+Qi+Rj+Sij$$

导数 $$f'(x)=\frac{\partial f}{\partial\alpha}=\frac{\partial f}{i\partial\beta}=\frac{\partial f}{j\partial\gamma}=\frac{\partial f}{ij\partial\delta} \qquad (70)$$

利用i，j的乘法表将上式乘开，可得椭圆双曲复函的广义C—R方程组

$$\begin{aligned} P_\alpha &= Q_\beta = R_\gamma = S_\delta \\ Q_\alpha &= -P_\beta = S_\gamma = -R_\delta \\ R_\alpha &= S_\beta = P_\gamma = Q_\delta \\ S_\alpha &= -R_\beta = Q_\gamma = -P_\delta \end{aligned} \qquad (71)$$

它的指数函数是

$$\begin{aligned} e^x &= e^{\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij} \\ &= e^\alpha(\cos\beta+i\sin\beta)(\mathrm{ch}\gamma+j\mathrm{sh}\gamma)(\cos\delta+ij\sin\delta) \\ &= E_1+iE_2+jE_3+ijE_4 \end{aligned} \qquad (72)$$

指数函数的分量E_1，E_2，E_3，E_4可用来验证广义C--R方程组成立，并满足演化的高阶族系方程组：

$$U_{\alpha^2}+U_{\beta^2}+U_{\gamma^2}+U_{\delta^2}=0$$

$$U_{\alpha^4}=U_{\beta^4}=U_{\gamma^4}=U_{\delta^4}$$

等等

这种四维泛复函也可作如下的与路径无关的积分：

$$\int_c f(x)dx=\int_c(P+Qi+Rj+Sij)d(\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij)$$

$$= \int_c P d\alpha - Q d\beta + R d\gamma - S d\delta + i\int_c Q d\alpha + P d\beta + S d\gamma + R d\delta$$

$$+ j\int_c R d\alpha - S d\beta + P d\gamma - Q d\delta + ij\int_c S d\alpha + R d\beta + Q d\gamma + P d\delta$$

我们是在实域上研究这种泛复函。但如前章所知，椭圆双曲数可看成椭圆与双曲数的直积。那么分别把双曲数和椭圆数作为分量域，椭圆双曲复函又有什么性质呢？首先，它可表示为：

$$f(x) = u + iv \qquad u,\ v \in H$$

$$f(x) = g + jh \qquad g,\ h \in C$$

如果利用双曲变量和椭圆变量做分量域的变量：

$$x = (\alpha + \gamma j) + (\beta + \delta j)i = \zeta + \xi i$$

$$x = (\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)j = \lambda + \mu j$$

则可导出解析函数分量满足双曲复函与椭圆复函中的偏微分方程：

$$\begin{cases} u_\zeta = v_\xi \\ u_\xi = -v_\zeta \end{cases} \qquad \begin{cases} g_\lambda = h_\mu \\ g_\mu = h_\lambda \end{cases} \tag{73}$$

这里偏导数u_ζ等就是下列的极限：

$$u_\zeta = \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial u}{\partial(\alpha + \gamma j)} = \lim_{\substack{\Delta\alpha \to 0 \\ \Delta\gamma \to 0}} \frac{\Delta u}{\Delta\alpha + \Delta\gamma j}$$

椭圆双曲复函的这些性质看出，泛复函对于不同的广域组成层次性的结构。

研究课题20　各种具体泛复函的映射下各种区域变换的性质.

§27　五维与n维复函

这节中我们考察一种特殊的五维复函和一种简单的n维复函。

五次回归复函

如果在实域上添入元基e，示性方程为　$e^5=e$
可成一种五维数，我们称为五次回归数，这种数的元素形状为

$$x=\alpha+\beta e+\gamma e^2+\delta e^3+\varepsilon e^4$$

x为零因子的条件是

$$\alpha=0 \quad 及 \quad \begin{cases}\beta\pm\delta=0\\ \alpha\pm\gamma+\varepsilon=0\end{cases} \tag{74}$$

利用x可构成五次回归泛复函

$$f(x)=P+Qe+Re^2+Se^3+Te^4$$

其中每个分量均为α，β，γ，δ，ε的五元函数，这种泛复函解析的充要条件是：各偏导存在且

$$f'(x)e^4=\frac{\partial f}{\partial\alpha}e^4=\frac{\partial f}{\partial\beta}e^3=\frac{\partial f}{\partial\gamma}e^2=\frac{\partial f}{\partial\delta}e=\frac{\partial f}{\partial\varepsilon} \tag{75}$$

乘开各部分，对照各分量，可得广义C—R方程：

$$\begin{aligned}T_\alpha+P_\alpha&=Q_\beta=R_\gamma=S_\delta=T_\varepsilon\\ Q_\alpha&=R_\beta=S_\gamma=T_\delta=Q_\varepsilon\\ R_\alpha&=S_\beta=T_\gamma=Q_\delta=R_\varepsilon\\ S_\alpha&=T_\beta=Q_\gamma=R_\delta=S_\varepsilon\\ 0&=P_\beta=P_\gamma=P_\delta=P_\varepsilon\end{aligned} \tag{76}$$

除元基的示性方程外，这一广义C—R方程组也看出点回归的味道。原最后一行P是加在T上的。

与路径无关的积分是：

$$\int_c(P+Qe+Re^2+Se^3+Te^4)d(\alpha+\beta e+\gamma e^2+\delta e^3+\varepsilon e^4)$$

$$=\int_c Pd\alpha+e\int_c Qd\alpha+(P+T)d\beta+Sd\gamma+Rd\delta+Qd\varepsilon$$

$$+e^2\int_c Rd\alpha+Qd\beta+(P+T)d\gamma+Sd\delta+Rd\varepsilon$$

$$+e^3\int_c Sd\alpha+Rd\beta+Qd\gamma+(P+T)d\delta+Sd\varepsilon$$

$$+e^4\int_c Td\alpha+Sd\beta+Rd\gamma+Qd\delta+(P+T)d\varepsilon$$

n维正交泛复函

我们利用n维正交数，基e_1，e_2，…，e_n示性方程

$$e_i e_j=\begin{cases}e_i & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{77}$$

引进变量　$\eta=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$

构成一种n维泛复变函数。

$$f(\eta)=f^{(1)}e_1+f^{(2)}e_2+\cdots+f^{(n)}e_n \tag{78}$$

对于这种正交泛复函的解析函数应满足

$$f'(\eta)e_i=\frac{\partial f(\eta)}{\partial x_i}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{79}$$

将（78）式代入上式并将上式乘以e_j，得$e_jf^{(i)}_{x_j}=0$　$(i\neq j)$ 也即$f^{(i)}_{x_j}=0$ $(i\neq j)$，就是第i个分量中不含其它的实变量，仅含第i个实变量x_i。

因而，我们可直接写成

$$f(\eta)=f^{(1)}_{(x_1)}e_1+f^{(2)}_{(x_2)}e_1+\cdots+f^{(n)}_{(x_n)}e_n$$

令上式中　$x_2=x_3=\cdots\cdots=x_n=0$。即得

$$f(x_1e_1)=f^{(1)}_{(x_1)}e_1$$

同理　　$$f(x_ie_i)=f^{(i)}_{(x_i)}e_i \tag{80}$$

由于e_i在第i个分蘖中起一个单位元的作用，就是说，如果我们站在第i个分蘖中讨论问题e_i就是实单位1，它在(80)

式中是可有可无的。而原来在总体上与其它各维一起讨论问题，为区别起见才在各维上加了一个标志e_i.因此我们得到：

$$f(x_i)=f^{(i)}_{(x_i)}$$

也即$f^{(i)}=f$，就是解析函数的各分量在形式上和原来函数一样，只是第i个分量是将变量换成了实数x_i，因之我们也可认为n维正交泛复函是一种孙悟空式的具有分身法的函数。

例如利用乘法表及级数我们即得：

$$f(\eta)=\eta^k=(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)^k$$

$$=x_1^ke_1+x_2^ke_2+\cdots+x_n^ke_n$$

$$\sin\eta=\sin(x_1e+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)$$

$$=\eta-\frac{\eta^3}{3!}+\frac{\eta^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{\eta^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$=(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)-\frac{1}{3!}(x_1^3e_1+x_2^3e_2+\cdots$$

$$+x_n^3e_n)+\frac{1}{5!}(x_1^5e_1+x_2^5e_2+\cdots+x_n^5e_n)-\cdots$$

$$=\sin x_1e_1+\sin x_2e_2+\cdots+\sin x_ne_n.\qquad\text{等等.}$$

这里应该补充说明一点，我们并未将主单位元1独立，而是包含在单位元的组合中构造的泛复函。因此例如e^η的展开应注意到$1=e_1+e_2+\cdots+e_n$

$$e^\eta=1+\eta+\frac{\eta^2}{2!}+\frac{\eta^3}{3!}+\cdots+\frac{\eta^n}{n!}+\cdots$$

$$=(e_1+e_2+\cdots+e_n)+(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)$$

$$+\frac{1}{2!}(x_1^2e_1+x_2^2e_2+\cdots+x_n^2e_n)+\cdots$$

$$=e^{x_1}e_1+e^{x_2}e_2+\cdots+e^{x_n}e_n$$

这种函数的其它运算也是进行了各种分身法，例如与路径无关的积分是：

$$\int_c f(\eta)d\eta=\int_c [f(x_1)e_1+f(x_2)e_2+\cdots+f(x_n)e_n]d(x_1e_1$$

$$+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)$$

$$=e_1\int_c f(x_1)dx_1+e_2\int_c f(x_2)dx_2+\cdots+e_n\int_c f(x_n)dx_n$$

等等。

研究课题21　各种具体泛复函的特性与作用．如满足的方程、奇异积分等等．

§28　零点与奇点的基本定理

零点与奇点在通常的椭圆复变函数中扮演了非常特殊和重要的角色。但在一般的泛复函中，我们可以初步探索到它将有许多和复函不同的性质。

定理26　除实变及复变解析函数外，其它有限维泛复变解析函数的零点不一定是孤立的．

证明　根据邦德列雅金定理，除实域和复域外，其它广域所形成的泛复数定有零因子，否则会形成新的域。设θ、$\overline{\theta}\in X$为泛复数X中的共轭零因子。取X中的泛复解析函数$f(\zeta)$，易知$\varphi(\zeta)=\theta f(\zeta)$　也是解析的．我们取值$f(\zeta)=\lambda\overline{\theta}$时，有$\varphi(\zeta)=0$。而当$\lambda$在实域连续变化时，$f(\zeta)$是连续的，从而$\varphi(\zeta)$的零点不是孤立的。

例1　在椭圆双曲复函中，解析函数

$$f(x)=(1-j)x=(1-j)(\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij)$$

有连续的零点：$x=a(1+j)$其中a为任意椭圆双曲线。

为研究泛复函的值是零因子点的情况，我们先考察一下零因子的一些性质。

定义52 设θ为泛复数X中的一个零因子。对$\forall a\in X$，一切形如$a\theta$的元素称为**同类零因子集**。（今后如无特殊说明我们所说零因子集均包含零）。其所在的集合Θ称为θ类零因子集。形如$a\theta+c$（c为常数）的集合可记为$\Theta+c$，叫做与Θ距离c的**平行集**，或称为**拟零因子集**。

不难得到

定理27 泛复数X中的同类零因子集Θ构成子泛复数。且构成X的理想。

定理28 泛复数中，各类零因子以零点为公共极限点。即各类零因子经过零点连通。

证明 设Θ为泛复数X中任意的某类零因子集，设$\theta\in\Theta$，对任意$\varepsilon>0$，取$\delta<\dfrac{\varepsilon}{\|\theta\|}$，则有

$$\|\delta\theta\|=\delta\|\theta\|<\varepsilon \qquad \text{且} \quad \delta\theta\in\Theta\text{。}$$

即在零点的ε邻域内有Θ类零因子$\delta\theta$。由于Θ的任意性，因此在零点的任意ε邻域均存在各类的零因子。

推论 除实函和复函外，其它泛复函零点的任一邻域均有无穷多零因子点。

定理29 除实函和复函外，其它泛复解析函数$f(x)$的奇点均非孤立的。

证明 设a为$f(x)$的奇点。且

$$\varphi(x)=\frac{1}{f(x)}=(x-a)q(x)+r$$

则r必为零或零因子。否则$f(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$在点$a$的值为$\dfrac{1}{r}$，与

a为f的奇点矛盾.

① 设$r=0$，θ为零因子，令$x=a+\varepsilon\theta$，则

$$f(x)=\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{\varepsilon\theta q(a+\varepsilon\theta)}$$

不存在。由于ε的任意性，可知a点的邻域中有连续的奇点$a+\varepsilon\theta$。

② 设r为零因子，令$x=a+\varepsilon r$

$$f(x)=\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{r[\varepsilon q(a+\varepsilon r)+1]}$$

也不存在。因而a的邻域中有连续的奇点$a+\varepsilon r$。

定理得证.

所以除实和复函外，其它泛复解析函数奇点的任一邻域均有无穷多连续奇点.

例 2 在椭圆双曲解析泛复函中$f(x)=\dfrac{1}{x-a}$在奇点a的任一邻域中，均存在奇点集：

$$x=a+\varepsilon(\alpha+\beta i)(1\pm j)$$

其中α、β为任意实数

例 3 抛物复函P中，$z=x+ky$。求分式函数

$$f(z)=\frac{kz+1-k}{z+2}$$

的零点与奇点.

解 ① $kz+1-k=0$，无解，因此无零点.

② $z+2=\lambda k$，因此可得奇点为：$z=\lambda k-2$（λ为任意实数）

研究课题22　各种具体泛复函零点与奇点，规律及其应用的研究.

§29 唯一性定理及进一步规律

本节中我们考察一下今后可能常用到的几个重要性质。

定理30 θ类零因子集在解析变换后的集合都是θ类拟零因子集。

证明 设$w=f(\theta)$是对θ的一种解析变换，将f在解析点a展成泰勒级数，所以得

$$w=f(\theta)=f(a)+f'(a)(\theta-a)$$

$$+\frac{f''(a)}{2!}(\theta-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\theta-a)^n+\cdots$$

$$=f(a)-f'(a)a+\frac{f''(a)}{2!}a^2-\cdots+(-1)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}a^n$$

$$+\cdots\cdots+\lambda\theta=\lambda\theta+b$$

由于对于Θ中的任一元素θ，b值均为与θ无关的定值，又$\lambda\theta\in\Theta$，即$f(\theta)$所在的集合是原零因子集Θ率移了b。

这一定理实质上确定了在解析变换下，零因子集只能平移不能旋转或形变。

推论1 如果$f(x)$在零点解析，则零因子集Θ在解析变换后是将Θ平移$f(0)$。

推论2 拟零因子集解析变换后是同类拟零因子集。

例1 双曲平面解析变换$w=z^2=(x+jy)^2$将单位圆内区域映射成什么？零因子映射成什么？

解 因单位圆周$z=\cos\varphi+j\sin\varphi$，所以有$w=f(z)=z^2=(\cos\varphi+j\sin\varphi)^2=1+j\sin2\varphi$ 又因$u=Rez^2=x^2+y^2\geqslant0$，$v=Imz^2=2xy$，所以单位圆映射成$0\leqslant u<1$，$u\geqslant|v|$的角形区域。

又因$w_0=f(0)=0$所以零因子集仍为原零因子集。单位圆内的零因子集$\lambda(1+j)$及$\lambda(1-j)$，$|\lambda|<\frac{1}{\sqrt{2}}$，则映射成连接原点与$1+j$及$1-j$的两线段。

定理31 如果两个泛复变函数$f(x)$、$g(x)$在它们解析的单连通区域G内非同类拟零因子无穷集合E上相等，且E在G内有极限点，那么f和g在G内全等。

证明 设x_0为E的极限点，且有展开式：

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots\cdots$$

$$g(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\cdots\cdots$$

取E内一趋向x_0的序列ξ_k（$k=1,2,3,\cdots$）由于f和g在x_0解析，且$f(\xi_k)=g(\xi_k)$，取极限则得．$f(x_0)=g(x_0)$。由此$a_0=b_0$。

又因当$x=\xi_k$时，$x-x_0$非零因子，否则$\xi_k=x_0+(x-x_0)$为同类拟零因子，因此有

$a_1+a_2(x-x_0)+a_3(x-x_0)^2+\cdots=b_1+b_2(x-x_0)+b_3(x-x_0)^2+\cdots$取极限后得$a_1=b_1$。同理可得，对任何$n$都有$a_n=b_n$，因此在级数收敛的以$x_0$为中心，$\delta_0$为半径的超球$S_0$：$\|x-x_0\|\leqslant\delta_0$上，$f(x)\equiv g(x)$。

对于G内的任一点x要证明$f(x)=g(x)$，可将x与x_0用曲线L连通，然后取超球面S_0与L的交点x_1为极限点，用上述方法同理可证在超球S_1：$\|x-x_1\|\leqslant\delta_1$中$f(x)\equiv g(x)$。这样类推，可得$L$上的点即包括$G$上的任一点$x$均有$f(x)=g(x)$，即$G$内$f(x)\equiv g(x)$。

这一结果与零点非孤立定理也是相协调的。

推论 如果一个泛复解析函数$h(x)$在解析区域G内非同类拟零因子无穷集合E中为零，且E在G内有极限点，那么在

G内$h(x)\equiv 0$。

我们考察这推论的另一面意义可得

定理32 非恒为零的解析泛复函的根集，必为孤立点或某些同类拟零因子集。

因此，我们得知了某种泛复数零因子集的图形，就能知道这种泛复数的解析函数的零点集定为孤立点或与这种图形平行的集合。

例 2 在三次单位数N_1^3中解析函数$f(x)$的零点$x=\zeta+\eta e+\xi e^2$形状如何？

解 因N_1^3中零因子为直线$\zeta=\eta=\xi$和平面$\zeta+\eta+\xi=0$，以$f(x)$的零点为孤立点或与上述直线或平面平行的集合。

另外，我们考察解析函数的准根集，也即满足$f(x)=\theta$（θ为零因子）的点x的集合。在$f'(x)$不为零或零因子点，$f(x)$的反函数$\varphi(x)$也解析。因此由以上定理$x=\varphi(\theta)=\varphi(0)+\lambda\theta$。也即有

定理33 在$f'(x)$不为零及零因子时，解析泛复函的θ类准根集为θ类零因子集平移了根值$x_0=\varphi(0)$距离的拟零因子集。

推论 泛复解析函数的奇点为某些拟零因子集。

例 3 求双曲平面H上$f(z)=\arccos z=\lambda(1-j)$的准根集

解 因为$z=\varphi[\lambda(1-j)]=\cos\lambda(1-j)$。$\varphi(0)=1$。所以准根集为$z=\varphi(0)+\mu(1-j)=1+\mu(1-j)$即直线。$x+y=0$向右平移了一个单位。

由本节唯一性定理，即定理31可得

猜测10 泛复解析函数存在着一种用某些边值表示其它函数值的公式．但其形式不一定全同于柯西公式．寻找各种这样的公式，就成

为一重要研究课题.

习 题 六

1 平面H上，直线$x=at$，$y=bt$ 被函数$w=u+jv=(x+jy)^2$映射到w平面上是什么曲线?

2 求双曲复函$f(z)=u+jv=(x+jy)^3$的u和v并验证：

$u_x=v_y$ $\qquad$ $u_y=v_x$

3 试证，双曲复变解析函数的实部与虚部满足：

① $\Delta^2 U=U_{x^4}-2U_{x^2y^2}+U_{y^4}=0$

② $U_{x^{2n}}-U_{y^{2n}}=0$

4 试证，在双曲坐标变换$x=r\text{ch}\theta$，$y=r\text{sh}\theta$，下的双曲泛复函$w=u+jv$的广义C—R条件即二维波动方程是：

$u_\theta=rv_r$，$v_\theta=ru_r$.

5 计算积分

① $\int_c (x+jy)^2 d(x+jy)$. $\quad c$：从1到-1的上半圆.

$\int_c e^x(\text{ch}y+j\text{sh}y)d(x+jy)$ $\quad c$：从0到$1+j$的线段.

6 导出下列积分的实部与虚部，并求出其原函数的实部与虚部.

① P中 $\int \cos(x+ky)d(x+ky)$.

② H中 $\int \text{sh}(x+jy)d(x+jy)$.

7 试证，圆内整点(两个坐标均为整数)的个数就是双曲复函$\sin(x+jy)\pi$的圆内零点的个数.

8 三次单位复函中求积分

① $\int_c (\zeta+\eta e+\xi e^2)^3 d(\zeta+\eta e+\xi e^2)$.

c: $\zeta=\cos t$, $\eta=\sin t$, $\xi=1$ $(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2})$

② $\int_c exp(\zeta+\eta e+\xi e^2)d(\zeta+\eta e+\xi e^2)$.

c: $4\zeta^2+9\xi^2=1$, $\eta=0$

10 试证，三次单位解析复函的分量均满足：

① $u_{\zeta^6}-u_{\eta^6}=u_{\xi^6}$

② $P^2_{\zeta^2}+2Q_{\zeta^2}R_{\zeta^2}=R^2_{\eta^2}+2P_{\eta^2}Q_{\eta^2}$

11 椭圆双曲复函中，解析函数分量满足：

① $u_{\alpha^2}+u_{\beta^2}+u_{\gamma^2}+u_{\delta^2}=0$

12 在椭圆双曲复函中，$x=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij$，计算：

① $\int_c(x^2-x)dx$

c: $\gamma=\delta=0$, $\alpha=\beta=t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$

② $\int_c e^{2x}dx$.

c: $\alpha=\gamma=0$, $\beta=\cos\theta$, $\delta=\sin\theta$, $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$

13 五次回归数$x=\alpha+\beta e+\gamma e^2+\delta e^3+\varepsilon e^4$的逆元$x^{-1}$是什么？请合理地定义它的模$|x|_M$.

14 试导出五次回归复函与路径无关积分的各分蘖。

15 写出七维正交泛复函的两个高阶族系方程。

16 导出五次单位复函的主要规律。

17 证明满足方程$u_{y^2}\oplus u_{x^2}=0$的实函数v定满足

$u_x-v_y=0$, $u_y\oplus v_x=0$

18 证明满足三阶方程$u_{\zeta^3}=u_{\eta^3}$的实函数u定为满足一阶方程组

$P_\zeta=Q_\eta$ $Q_\zeta=R_\eta$ $R_\zeta=P_\eta$

中的某一函数。

19 抛物复函中，举出零点是孤立与非孤立的解析函数各一例。

20　双曲复函中，求$f(z)=(1+j)(z-2)=0$的根集．以及$g(z)=z^2$以$1-j$为原模的准根集．

21　三次单位复函中，找出点$(2+e-e^2)$邻域内函数$f(x)=\frac{1}{x}$的奇点．

22　试求双曲平面上零因子集$\theta=\lambda(1+j)$经过解析变换$f(z)=e^z$后的拟零因子集．

23　抛物复函中，求$f(z)=\cos z=\lambda k$的准根集．

§30　广义导数与广义解析函数

本节中，我们对通常的导数概念加以推广。这一概念二维情况下的最初引进应归功于L.倍尔斯和A.维库阿。

定义53　泛复变量　$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$的函数$w(x)$如下的极限，称为$w(x)$在$x_0$点以F，G，…，P为终点的**广义导数**：

$$\frac{d_{FG\cdots P}w(x)}{dx}=$$

$$\lim_{\|x-x_0\|\to 0}\frac{w(x)-\lambda_1F(x)-\lambda_2G(x)-\cdots-\lambda_mP(x)}{x-x_0} \tag{81}$$

其中λ_k为实数，F、G、…P为泛复函，它的个数m称为广义导数的度数。

定义54　当x以任何路径趋向x_0，m度导数存在且唯一，则称$w(x)$在x_0是**m度广义可导的**。在x_0及其邻域内m度广义可导的泛复函，叫做在x_0点m度**广义解析**的。

通常的导数是一度的，即$\lambda_1=1$，$F(x)=w(x_0)$为终点

的导数。

对于m度广义解析函数，我们给出如下的结果：

定理34 下面等式（82）的存在及连续与（83）等同，这时定有（84）成立。

$$\frac{d_{FG\cdots P}w(x)}{dx}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{w(x)-\lambda_1F(x)-\lambda_2G(x)-\cdots-\lambda_mP(x)}{x-x_0} \quad (82)$$

$$w_{\bar{x}}(x)=aw^{*1}+bw^{*2}+\cdots+hw^{*m} \quad (83)$$

$$\frac{d_{FG\cdots P}w(x)}{dx}=w_x(x)-Aw^{*1}-Bw^{*2}-\cdots-Hw^{*m} \quad (84)$$

其中系数a、b、$\cdots h$和A、B、$\cdots H$见后面的叙述，我们 称 它为特征系数．$*_i$为变量x所在泛复数中的第i种星轭运算。

证明 如果等式（82）于x_0存在且连续，设

$$W(x)=w(x)-\lambda_1F(x)-\lambda_2G(x)-\cdots-\lambda_mP(x)$$

则 $$W(x_0)=w(x_0)-\lambda_1F(x_0)-\lambda_2G(x_0)-\cdots-\lambda_mP(x_0)=0$$

有 $$W^{*i}(x_0)=w^{*i}(x_0)-\lambda_1F^{*i}(x_0)-\lambda_2G^{*i}(x_0)-\cdots-\lambda_mP^{*i}(x_0)=0$$

为简便起见，记$w(x)=w$，$w(x_0)=w_0$等等。

由前面等式可得：

$$\begin{vmatrix} W-w & w_0^{*1} & w_0^{*2} & \cdots & w_0^{*m} \\ F & F_0^{*1} & F_0^{*2} & \cdots & F_0^{*m} \\ G & G_0^{*1} & G_0^{*2} & \cdots & G_0^{*m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P & P_0^{*1} & P_0^{*2} & \cdots & P_0^{*m} \end{vmatrix}=0 \quad (85)$$

由此
$$\Delta-\begin{vmatrix} W & 0 \\ 0 & \Delta_0 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{及} \qquad W=\Delta/\Delta_0$$

其中
$$\Delta=\begin{vmatrix} w & w_0^{*1} & w_0^{*2} & \cdots & w_0^{*m} \\ F & F_0^{*1} & F_0^{*2} & \cdots & F_0^{*m} \\ G & G_0^{*1} & G_0^{*2} & \cdots & G_0^{*m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P & P_0^{*1} & P_0^{*2} & \cdots & P_0^{*m} \end{vmatrix} \tag{86}$$

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} F_0^{*1} & F_0^{*2} & \cdots & F_0^{*m} \\ G_0^{*1} & G_0^{*2} & \cdots & G_0^{*m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ P_0^{*1} & P_0^{*2} & \cdots & P_0^{*m} \end{vmatrix} \tag{87}$$

由W的解析性及定理（21）可得

$$W_{\bar{x}}=0 \qquad W'(x_0)=W_x(x_0)$$

这样就有

$$\begin{vmatrix} w_{\bar{x}}(x_0) & w_0^{*1} & w_0^{*2} & \cdots & w_0^{*m} \\ F_{\bar{x}}(x_0) & F_0^{*1} & F_0^{*2} & \cdots & F_0^{*m} \\ G_{\bar{x}}(x_0) & G_0^{*1} & G_0^{*2} & \cdots & G_0^{*m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ P_{\bar{x}}(x_0) & P_0^{*1} & P_0^{*2} & \cdots & P_0^{*m} \end{vmatrix}=0, \tag{88}$$

$$\frac{d_{FG\cdots P}W}{dx}=\frac{1}{\Delta_0}\begin{vmatrix} w_x(x_0) & w_0^{*1} & w^{*2} & \cdots & w_0^{*m} \\ F_x(x_0) & F_0^{*1} & F_0^{*2} & \cdots & F_0^{*m} \\ G_x(x_0) & G_0^{*1} & G_0^{*2} & \cdots & G_0^{*m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ P_x(x_0) & P_0^{*1} & P_0^{*2} & \cdots & P_0^{*m} \end{vmatrix} \tag{89}$$

当x_0在某区域内均成立时可记为变量x. 即得定理中(83)，(84) 式。

其中 $a=\Delta_x^{(1)}/\Delta_0$，　$b=\Delta_x^{(2)}/\Delta_0$，…，　$h=\Delta_x^{(m)}/\Delta_0$。

$$A=\Delta_*^{(1)}/\Delta_0,\quad B=\Delta_*^{(2)}/\Delta_0,\quad \cdots,\quad H=\Delta_*^{(m)}/\Delta_0. \tag{90}$$

$\Delta_x^{(i)}$，$\Delta_*^{(1)}$即是（88），及(89)分子中第一行对应元素的代数余子式反号，但其中x_0应记为x。

类似文献（1）中的方法可由（83）式得出(82)(84)式。

等式（83）相当于$\frac{1}{2}n^2(n-1)$个实偏微分方程的方程组。其系数由泛复数基的乘法表，例如$S(e)$的代数结构常数γ以及终点函数F、G，…P的星轭运算来确定. 我们称这实方程组为广义解析函数$w(x)$的**基本方程组**.（83）式的左边$D_{\bar{x}}w(x)$是方程的主要部份，它决定偏微分方程组的类型。正如古典复变算子$D_{\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$决定二维椭圆型方程组一样。（83）式主部的实形式在泛复数$S(e)$中是：

$$\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ki}^{l}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}-\sum_{k=1}^{n}\gamma_{kj}^{l}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \tag{91}$$

其中$u_k=u_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$；$i, j, l=1, 2, \cdots, n$。$\gamma$为$S(e)$的结构常数。

对于（83）式的右边各项系数，它含有$m\times n$个独立的参变实函。它决定非齐阶方程组的低阶部份。

由m度广义解析函数的定义，可得下列规律

（1）若终点F、G、…、P是解析的，则对应的广义解析函数是解析的。

（2）w_1，w_2广义解析，则$w_3=\mu_1 w_1+\mu_2 w_2$（μ为实常数）也是广义解析的。且有

$$\frac{d_{FG\cdots P}w_3}{dx}=\mu_1\frac{d_{FG\cdots P}w_1}{dx}+\mu_2\frac{d_{FG\cdots P}w_2}{dx}$$

（3）$\dfrac{d_{FG\cdots P}F}{dx}=\dfrac{d_{FG\cdots P}G}{dx}=\cdots=\dfrac{d_{FG\cdots P}P}{dx}=0$

作为二度广义泛复变解析函数完整的例子，是大家熟悉的广义复变解析函数或叫准解析函数，参看文献1．另一个美好的例子是R.吉尔伯特和G.海勒的广义超复变函数理论。参看文献13。它是将古典复解析算子，利用微量数后的结果。

猜测11　n维泛复函中定可建立1至n度广义解析函数．它将成为非齐阶方程与齐阶方程联系的纽带，成为非齐阶线性偏微分方程函数论的基础．

§31　一度广义解析泛复函

本节我们初步考察一度广义解析泛复函．从这里我们可感性地对广义解析加以了解．

如果我们定义$*_1$为不变算子，即$w^{*1}=w$，则一度广义解析有如下三个等价关系．

$$\frac{d_F w}{dx}=\lim_{x\to x_0}\frac{w(x)-\lambda F(x)}{x-x_0} \tag{92}$$

$$w_{\bar{z}} = aw \qquad a = \frac{F_{\bar{z}}}{F} \tag{93}$$

$$\frac{d_F w}{dx} = w_z - Aw \qquad A = \frac{F_z}{F} \tag{94}$$

这三式可直接由上节的（87）（88）（89）及a、A的计算得出，如果把$w = w_1e_1 + w_2e_2 + \cdots + w_ne_n$及$w_{\bar{z}}$，$w_z$的所有可能的计算（47）代入则可得到等式（93）相当于实偏微分方程组：

$$\sum_{\gamma=1}^{s} \gamma_{q\gamma}^{s} \frac{\partial w_\gamma}{\partial x_p} - \sum_{\gamma=1}^{s} \gamma_{p\gamma}^{s} \frac{\partial w_\gamma}{\partial x_q} = \sum_{ijkl=1}^{n} \gamma_{ij}^{k} \gamma_{pq}^{l} \gamma_{Kl}^{S} \alpha_i w_j$$

其中p、q、$s = 1, 2, \cdots, n$，α_i是a的各分量。γ是泛复数$S(e)$基的乘法表系数。

定理35 设q是一度F广义解析的，则有

（1）若p也是一度F广义解析，在q的非零及零因子点$w = p/q$是解析的。

（2）若w是解析的，则$p = qw$是F广义解析的。

证明（1）由于算子

$$w_{\bar{z}} = D_{\bar{z}} w = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i e_i} - \frac{\partial w}{\partial x_j e_j}\right)$$

以及D_z都具有导数相似的运算性质，可得

$$w_{\bar{z}} = \left(\frac{p}{q}\right)_{\bar{z}} = \frac{pq_{\bar{z}} - p_{\bar{z}}q}{q^2} = \frac{p(aq) - (ap)q}{q^2} = 0$$

（2）由w解析$w_{\bar{z}} = 0$，因而

$p_{\bar{z}} = (qw)_{\bar{z}} = q_{\bar{z}}w + qw_{\bar{z}} = aqw = ap$ 即p是F广义解析。

由于F是一度广义解析$w = \dfrac{q}{F}$是解析的，因而有

推论 任何一度F广义解析函数q均可写成$q = Fw$的形式.

其中w是解析函数。

因此一度广义解析函数问题常可用上述形式化成解析函数来处理。

例1 双曲复函中设$F(z)=x^2+jy^2$，F广义解析函数，$W=U+jV$，它的基本方程组（93）为

$$\begin{cases}U_x-V_y=2\alpha U+2\beta V\\ V_x-U_y=2\beta U+2\alpha V\end{cases}\tag{95}$$

其中

$$\alpha=\frac{x^2}{(x+y)(x^2+y^2)}\qquad \beta=-\frac{y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

这种F广义解析函数由推论可写成

$$W=U+jV=(x^2+jy^2)(u+jv)$$

其中$u+jv=f(z)$是$z=x+jy$的任意双曲解析函数，因而也就有U，V的显式表达

$$\begin{cases}U=x^2u+y^2v\\ V=x^2v+y^2u\end{cases}$$

我们见到上例基本方程右侧参变实函只有两个，$m\times n=1\times 2=2$.如果要保证其系数具有一般性则需4个参变实函就需要$m=2$度广义解析函数才行。

对于一度广义解析函数，我们还可有

定理36 一度广义解析函数的广义导函数也是一度广义解析的。

证明 因为$a=F_{\bar{z}}/F$，$A=F_z/F$ 所以有$a_z=A_{\bar{z}}$，由此及定理34，

$$\left(\frac{d_Fw}{dz}\right)_{\bar{z}}=(w_z-Aw)_{\bar{z}}$$

$$=w_{z\bar{z}}-Aw_{\bar{z}}-A_{\bar{z}}w$$

$$=a_zw+aw_z-Aw_{\bar{z}}-A_{\bar{z}}w$$

$$= aw_{\bar z} + w(a_z - Aa - A_{z\bar z})$$

$$= a(w_z - Aw)$$

$$= a\left(\frac{d_F w}{dx}\right)$$

上面我们只是观察了将星轭运算$*_1$作为不变算子对待的一度广义解析的意义。在$*_1$是其它特定意义时，其基本规律是相同的，但还有其它特性否，尚不清楚。因而可有

研究课题23　各种具体一度广义解析泛复函的分类与研究.

§32　二度与四度广义解析函数简例

本节我们观察两个简例，进一步了解广义解析函数的性质，这也给我们带来一些直观的感性认识。

二度双曲广义解析函数简例

双曲复函中，设终点函数为

$$F = \cos x, \qquad G = \sin yj$$

则如果按$(\alpha+\beta j)^{*1} = \alpha+\beta j \qquad (\alpha+\beta j)^{*2} = \alpha-\beta j$

可知 $F^{*1} = F = \cos x \qquad F^{*2} = \cos x$

$$G^{*1} = G = j\sin y \qquad G^{*2} = -j\sin y$$

它的基本方程为

$$\begin{vmatrix} (u+jv)_{\bar z} & u+jv & u-jv \\ (\cos x)_{\bar z} & \cos x & \cos x \\ (j\sin y)_{\bar z} & j\sin y & -j\sin y \end{vmatrix} = 0$$

其中 $W_{\bar z} = D_{\bar z}W = D_{\bar z}(u+jv)$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(u+jv)}{\partial x} - \frac{\partial(u+jv)}{\partial jy}\right]$$

也即

$$\begin{vmatrix} (u_x+jv_x)-(ju_y+v_y) & u+jv & u-jv \\ -\sin x & \cos x & \cos x \\ -\cos y & j\sin y & -j\sin y \end{vmatrix} = 0$$

展开整理后得：

$$\begin{cases} u_y - v_x = 0 \\ v_y - u_x = u\text{tg}x + v\text{ctg}y \end{cases}$$

由于终点函数的特殊性，导出的基本方程较为简单，但如果仍采用上述星轭运算，而终点函数采用一般的形式基本方程就较复杂，例如令

$$F = \alpha + j\beta \qquad G = \gamma + j\delta$$

其中α、β、γ、δ为可微实函，则所成基本方程为：

$$\begin{vmatrix} (u_x-v_y)+j(u_x-u_y) & u+jv & u-jv \\ (\alpha_x-\beta_y)+j(\beta_x-\alpha_y) & \alpha+j\beta & \alpha-j\beta \\ (\gamma_x-\delta_y)+j(\delta_x-\gamma_y) & \gamma+j\delta & \gamma-j\delta \end{vmatrix} = 0$$

将它展开后则得方程组：

$$\begin{cases} u_x - v_y = au + bv \\ v_x - u_y = cu + dv \end{cases}$$

其中

$$a = [\beta(\gamma_x - \delta_y) - \delta(\alpha_x - \beta_y)]/(\beta\gamma - \alpha\delta)$$
$$b = [\gamma(\alpha_x - \beta_y) - \alpha(\gamma_x - \delta_y)]/(\beta\gamma - \alpha\delta)$$
$$c = [\beta(\delta_x - \gamma_y) - \delta(\beta_x - \alpha_y)]/(\beta\gamma - \alpha\delta)$$
$$d = [\gamma(\beta_x - \alpha_y) - \alpha(\delta_x - \gamma_y)]/(\beta\gamma - \alpha\delta).$$

双曲椭圆广义解析函数

下面我们再看一个特殊的四度广义解析函数的例子。因椭圆双曲数中有四种星轭运算，因此它可建立一度到四度的

广义解析函数。它四度广义导数等关系为：

$$\frac{d_{FGHI}w}{dx}=\lim_{x\to x_0}\frac{w-\lambda_1F-\lambda_2G-\lambda_3H-\lambda_4I}{x-x_0} \tag{96}$$

$$w_{\bar{x}}=aw^{*1}+bw^{*2}+cw^{*3}+dw^{4} \tag{97}$$

$$\frac{d_{FGHI}w}{dx}=w_x-Aw^{*1}-Bw^{*2}-Cw^{*3}-Dw^{*4} \tag{98}$$

其中 $x=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij,\qquad w=P+Qi+Rj+Sij$

$$w^{*1}=P+Qi+Rj+Sij$$

$$w^{*2}=P-Qi+Rj-Sij$$

$$w^{*3}=P+Qi-Rj-Sij$$

$$w^{*4}=P-Qi-Rj+Sij$$

（67）式相当于24个实方程构成的超定偏微分方程组．主部由下面 6 个算子决定：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta i},\qquad \frac{\partial}{\partial\beta i}-\frac{\partial}{\partial\gamma j},\qquad \frac{\partial}{\partial\gamma j}-\frac{\partial}{\partial\delta ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial\delta ij}-\frac{\partial}{\partial\alpha},\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\gamma j},\qquad \frac{\partial}{\partial\beta i}-\frac{\partial}{\partial\delta ij}$$

其附属部份$aw^{*1}+bw^{*2}+cw^{*3}+dw^{*4}$由星轭运算$w^*$和终点函数$F$、$G$、$H$、$I$、来决定，其中有16个参变实函。附属部份的分量数之所以能与方程数24一致，是因为在其系数a，b，c，d中也使用了上述 6 个微分算子。如其中有$F_{\bar{\alpha}}$、$G_{\bar{x}}$、$H_{\bar{x}}$、$I_{\bar{x}}$等，它们与$w_{\bar{x}}$是相对应的。

由基本方程也可导出广义解析函数的高阶微分方程组，构成广义解析泛复函的族系方程。但其主要部份和解析函数族系方程相同。而它具有较丰富的低阶部份。

研究课题24　各种具体的多度广义解析泛复函的性质，以及它与各种方程的关系。

某种意义上说，找到了方程对应的广义解析泛复变函数就是找到了它们的显解或一定对应意义上的解。

§33　多元泛复变解析函数

泛复函向多元发展是必然的，但本书只能起点抛砖的作用，更多美玉的出现有赖于读者的工作。

设X_σ为泛复数空间$z_\sigma\in X_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,k)$记$X=X_1\otimes X_2\otimes\cdots\otimes X_k$为$X_\sigma$的直积，$\widetilde{X}=X_1\times X_2\times\cdots\times X_k$为$X_\sigma$的交积，$z=(z_1,z_2,\cdots,z_k)$。

定义55　映射$w=f(z)$：$X\to\widetilde{X}$，叫做k元泛复变函数

例 1　$S_\sigma(e)$中变元$z_\sigma=\zeta_{1\sigma}e_{1\sigma}+\zeta_{2\sigma}e_{2\sigma}+\cdots\cdots$
$+\zeta_{n\sigma}e_{n\sigma}(\sigma=1,2,\cdots\cdots k)$

构成多元泛复函$w=f(z)$：$S(e)\to\widetilde{S}(e)$。当每个$\zeta_{i\sigma}\in R$都是独立时，则$f(z)$是$m=n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$个独立实变量的函数。当然$\zeta_{\sigma i}$也可以不是独立的，这时我们记独立实变量为$\zeta_\nu(\nu=1,2,\cdots,m)$。至于$w$的维数将由$\widetilde{S}(e)=S_1(e)\times S_2(e)\times\cdots\times S_k(e)$决定。

定义56　如果z_σ不沿零因子方向趋向z_σ^0时，下列极限存在且唯一，称多元泛复函$f(z)$在$z^0=(z_1^0,z_2^0,\cdots,z_k^0)$是可导的。在$z^0$及其邻域可导的$f(z)$，称为在$z^0$解析。

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_\sigma}=\lim_{\|z_\sigma-z_\sigma^0\|\to0}\frac{f(z_1^0,\cdots,z_\sigma,\cdots z_k^0)-f(z_1^0,z_\sigma^0,\cdots z_k^0)}{z_\sigma-z_\sigma^0}$$
$$(\sigma=1,2,\cdots,k)\tag{99}$$

对于$\widetilde{S}(e)$中区域D上的多元泛复解析函数

$$f(z)=\sum_{\mu=1}^{n} f_\mu e_\mu$$

它的泛复变量z_σ为k个，独立实变量$\zeta_{\sigma i}$为m个，则我们有

定理37 当$m\geqslant k+1$时$f(z)$的分量f_μ必须满足一序列广义$C—R$方程组（101）.

证明 因f解析，因此有

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta_\nu}=\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial \zeta_\nu}+\frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial \zeta_\nu}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial \zeta_\nu} \quad (100)$$

$$(\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

当$m\geqslant k+1$时，我们可任选（100）中$k+1$个等式，由于$\dfrac{\partial f}{\partial z_\sigma}$ $(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$存在且唯一，因而有

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \zeta_\lambda} & \frac{\partial z_1}{\partial \zeta_\lambda} & \frac{\partial z_2}{\partial \zeta_\lambda} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial \zeta_\lambda} \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta_\mu} & \frac{\partial z_1}{\partial \zeta_\mu} & \frac{\partial z_2}{\partial \zeta_\mu} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial \zeta_\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta_\tau} & \frac{\partial z_1}{\partial \zeta_\tau} & \frac{\partial z_2}{\partial \zeta_\tau} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial \zeta_\tau} \end{vmatrix}=0 \quad (101)$$

如果将$f(z)$及z_σ分蘖，即

$$f(z)=f_1e_1+f_2e_2+\cdots\cdots+f_ne_n$$

$$z_\sigma=\zeta_{1\sigma}e_{1\sigma}+\zeta_{2\sigma}e_{2\sigma}+\cdots\cdots+\zeta_{n\sigma}$$

则f_μ应满足m个自变量，n个未知函数，n个方程的实偏微分方程组。

当$m=k+1$时，选择方法唯一，因而方程是确定的。当$m>k+1$时，上述$k+1$个等式选取方法增多，因而f_μ将满足

一组个数为$\frac{nm(m-1)\cdots(m-k)}{(k+1)!}$的超定方程组．当$m<k+1$时，由于$z_\sigma$间有一定的相关性，$f_\mu$所满足的方程不再对任意解析函数$f(z)$都成立，而与$f$及$z_\sigma$的具体形式有关，讨论从略。

例 1　古典多元复变函数，$z=(z_1, z_2, \cdots z_k)$，$z_\mu=x_\mu+iy_\mu$解析函数：$w=f(z)=u+iv$：$C^k\to C$，或$R^{2k}\to R^2$。

当x_μ，y_μ是独立时，有

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_\mu}, & \frac{\partial z_\mu}{\partial x_\mu} \\ \frac{\partial f}{\partial y_\mu}, & \frac{\partial z_\mu}{\partial y_\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

即

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_\mu}+i\frac{\partial v}{\partial x_\mu}, & 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y_\mu}+i\frac{\partial u}{\partial x_\mu}. & i \end{vmatrix} = 0$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}=\frac{\partial v}{\partial y_\mu} \qquad \frac{\partial u}{\partial y_\mu}=-\frac{\partial v}{\partial x_\mu}$$

$(\mu=1, 2, \cdots, k)$

例 2　三次单位数的二元泛复函，即用

$$x=\zeta+\eta e+\xi e^2 \qquad x^*=\zeta+\xi e+\eta e^2$$

构成解析函数　$f(x, x^*)=P+Qe+Re^2$

由于有三个实变量，因此（101）式选择方式唯一

$$\begin{vmatrix} f_\zeta & x_\zeta & x_\zeta^* \\ f_\eta & x_\eta & x_\eta^* \\ f_\xi & x_\xi & x_\xi^* \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} (P+Qe+Re^2)_\zeta & 1 & 1 \\ (P+Qe+Re^2)_\eta & e & e^2 \\ (P+Qe+Re^2)_\xi & e^2 & e \end{vmatrix} = 0$$

展开后对照各分量，得

$$P_\zeta + P_\eta + P_\xi = Q_\zeta + Q_\eta + Q_\xi = R_\zeta + R_\eta + R_\xi.$$

研究课题25　多元泛复函的进一步的各种规律，以及它与微分方程的深一层的各种关系。

§34　形式重积分

多元泛复函的积分种类与其形式是非常之丰富的。本书只是初步探讨几种，但我深信，这一部份将有许多工作可做，且定会成为泛复函理论中占巨大篇幅，且有重要应用的一部份。

下面我们引入一种最简单的重积分：设l_i为泛复数空间X_i中的曲线。$z_i \in l_i (i=1, 2, \cdots k)$

定义57　逐层重积分

$$I = \iint_v \cdots \int f(z)dv = \iint_v \cdots \int f(z_1, z_2, \cdots, z_k)dz_1 dz_2 \cdots dz_k \tag{102}$$

是指每一层积分是在泛复数空间X_i中沿曲线l_i的一次积分，这时将其它变量视为参数。

也即

$$I=\int_{l_k} dz_k \int_{l_{k-1}} dz_{k-1} \cdots \int_{l_1} f(z_1, z_2, \cdots, z_k) dz_1$$

易知这种形式重积分具有许多实重积分的相似性质。

例 1 泛复数X_1，X_2，…，X_k各异时，积分成为直积 X 至交积 $\widetilde{X}$的映射。

如椭圆抛物数与椭圆数交积空间的积分：

$z_1=\alpha+\beta i+\gamma k+\delta ik$，$z_2=\mu+\lambda j$。曲线$l_1$为 0 到$z_1$，$l_2$为 0 到 $2z_2$，则

$$\iint_{l_1 l_2} z_2 dz_1 dz_2=\int_0^{2z_2} dz_2 \int_0^{z_1} z_2 dz_1=2z_2^2 z_1$$

$$=2\alpha(\mu^2-\lambda^2)-4\beta\mu\lambda+i[2\beta(\mu^2-\lambda^2)+4\alpha\mu\lambda]-4\delta\mu\lambda k$$
$$+4\gamma\mu\lambda ik$$

例 2 z同属于某一泛复数空间X时，则变为k个 X 的直积空间到X 的映射，特殊地，当 $z_1=z_2=\cdots=z_k$ 时，则积分成为单变量函数的K 阶积分，是X到X的映射：

$$I=\iint\cdots\int f(z)dz^k$$

这时可看成对上限为变量 z 的不定积分，I的k阶导数

$$I^{(k)}=f(z)$$

定义58 实体积分

$$I=\iint_v\cdots\int f(z)dv=\iint_v\cdots\int f(z)dx_1dx_2\cdots dx_m \qquad (103)$$

是在m维实空间上的一个区域 v 上的积分。如果将$f(z)$分糵$f(z)=f_1e_1+f_2e_2+\cdots+f_ne_n$，$I$即可看成由$n$个实积分构成分量的积分：

$$I=\iint_v\cdots\int f(z)\,dv=\sum_{\mu=1}^{n}e_\mu\iint_v\cdots\int f_\mu dx_1dx_2\cdots dx_m$$

这种积分也具有实函中体积分的许多类似性质。例如我们引进n维梯度算子：

$$\Delta_n=e_1\frac{\partial}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+e_n\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{104}$$

如果积分区域v又是实n维空间（x_1，$x_2\cdots$，x_n）的一个区域，那么有：

定理38 对泛复数$S(e)$中v上连续函数$f(z)$有

$$\iint_v\cdots\int\Delta_nf(z)dv=\iint_{\partial v=\sigma}\cdots\int\alpha f(z)d\sigma \tag{105}$$

其中σ是超曲面或称n维体v的边界。α为

$$\alpha=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n$$

α_i是σ法线在x_i方向的方向余弦。

证明 设$f(z)=f_1e_1+f_2e_2+\cdots+f_ne_n$

因为 $$\iint_v\cdots\int\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dv=\iint_\sigma\cdots\int\alpha_if_jd\sigma$$

所以 $$\iint_v\cdots\int\Delta_nf(z)dv=\iint_v\cdots\int\Big(e_1\frac{\partial}{\partial x_2}+e_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+$$

$$e_n\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)(e_1f_1+e_2f_2+\cdots e_nf_n)dv$$

$$=\sum_{i\,j\,k=1}^{n}\iint_V\cdots\int e_k\gamma_{ij}^k\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dv$$

$$= \sum_{i\,j\,k=1}^{n} \iint_{\sigma}\cdots\int e_k \gamma_{ij}^{k} \alpha_i f_j \, d\sigma$$

$$= \iint_{\sigma}\cdots\int (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n)(f_1 e_1 + f_2 e_2$$

$$+ \cdots + f_n e_n) d\sigma$$

$$= \iint_{\sigma}\cdots\int \alpha f(z) d\sigma$$

其中γ为$S(e)$的乘法表系数

这一公式可以推广至积分区域是$S(e)$中的区域v，即

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n$$

$$\sigma = \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \cdots + \sigma_n e_n$$

的情况。当然这仅是形式上的积分，至于其具体意义尚不清楚。

例3 设$S(e)$为三维正交数，基乘法表为

$$e_i e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

令$\nabla_3 = e_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \dfrac{\partial}{\partial x_3}$，$\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$，

$$f(z) = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$$

代入（105）式后，即得奥高公式：

$$\iiint_{v} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dv = \iint_{\sigma} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3) d\sigma$$

例4 n次单位数空间N_1^n中（$e^n = 1$）。设其变量及函数为

$$z = x_0 + x_1 e + x_2 e^2 + \cdots x_{n-1} e^{n-1}$$

$$f(\bar{z}) = f_0 + f_1 e + f_2 e^2 + \cdots + f_{n-1} e^{n-1}$$

对于解析函数有

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1 e} = \frac{\partial f}{\partial x_1 e^2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_{n-1} e^{n-1}} \quad (106)$$

由此

$$\iint_\sigma \cdots \int \alpha f(z) d\sigma = \iint_v \cdots \int \Delta_n f(z) dv$$

$$= \iint_v \cdots \int \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + e \frac{\partial}{\partial x_1} + e^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + e^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right) f(z) dv$$

$$= (1 + e^2 + e^4 + \cdots + e^{2(n-1)}) \iint_v \cdots \int \frac{\partial f(z)}{\partial x_0} dv$$

$$= (1 + e^2 + e^4 + \cdots + e^{2(n-1)}) \iint_v \cdots \int f'(z) dv$$

当n为奇数时，由基的示性方程$e^n = 1$，可得

$$1 + e^2 + e^4 + \cdots + e^{2(n-1)} = 1 + e + e^2 + \cdots + e^{n-1}$$

为零因子，即$(1-e)(1 + e^2 + e^4 + \cdots + e^{2(n-1)}) = 0$

因此在奇数维n次单位泛复数空间有，

$$(1-e) \iint_\sigma \cdots \int \alpha f(z) d\sigma = (1-e) \iint_v \cdots \int \Delta_n f(z) dv = 0 \quad (107)$$

研究课题26　在各种具体的泛复函中可建立不同形式的积分．它们的特性与功用如何？

猜测12　利用积分的某些特性可定义并建立一些特定意义下的解析函数系统．

习 题 七

1　试导出椭圆复函中$F=x-iy$的一度广义F解析函数的分量所应满足的基本方程组。

2　试导出抛物复函中$F=\sin(x+y)+e^{x+y}k$的一度广义F解析的基本方程组。

3　导出一度广义解析函数（93）（94）两式。

4　双曲复函中$F=e^x$，$G=y^2j$的F、G二度广义解析函数满足的基本方程组形式是什么？

5　导出椭圆复函中F、G解析函数（63）（94）中特征系数a、b，A、B用F，G表达的式子。

6　试定义复双曲数$R(j,\ j_1)$中四种星轭运算，并写出决定它基本方程组的六个算子。

7　试用$z=x+iy$和$\widetilde{z}=x-iy+t$做变量，导出二元泛复函$w=u+iv=f(z,\ \widetilde{z})$解析函数的广义$C$—$R$方程组。

8　试用三次单位数中变量$z=\zeta+\eta e+\xi e^2$和$z^*=\zeta+\eta+\xi$为变量导出二元泛复解析函数$w=f(z,\ z^*)=P+Qe+Re^2$的广义C—R方程组。

9　椭圆双曲变量$z=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij$和$z^*=\alpha-\beta i+\gamma j-\delta ij$，的二元解析函数$w=f(z,z^*)=P+Qi+Rj+Sij$的广义$C$—$R$方程组有几种组合？并导出其中一组。

10　椭圆抛物变量$z=\alpha+\beta i+\gamma k+\delta ik$和$z^{*1}=\alpha-\beta i+\gamma k-\delta ik$，$z^{*2}=\alpha+\beta i-\gamma k-\delta ik$的三元解析函数$w=f(z,z^{*1},z^{*2})=P+Qi+Rk+Sik$所应满足的广义$C$—$R$方程是什么？

11　计算平面复函所构成的逐层重积分：

①　$\int_0^j\int_0^i z_1z_2dz_1dz_2$　　$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+jy_2$

② $\int_0^{k}\int_0^{z_2+i} z_2 dz_1 dz_2 \qquad z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + ky_2$

12　在椭圆抛物复函中$z = \alpha + \beta i + \gamma k + \delta ik$，，试将积分 $I = \iint z dz$ 分藥．并用计算泛复函重积分来直接写出分量实积分的结果．

13　写出椭圆双曲复函中广义奥高公式的具体形式．

14　试计算三次单位泛复函的实体积分：

$$I = \iiint\limits_{V} (\zeta + \eta e + \xi e^2)^2 d\zeta d\eta d\xi$$

V是实空间中的立方体．$0 \leqslant \zeta \leqslant 1$，$0 \leqslant \eta \leqslant 1$，$0 \leqslant \xi \leqslant 1$，

15　试定义并研究双曲复函重积分

$$\iint\limits_{D} f(z) dz, \qquad z = x + jy$$

其中D为双曲平面H上的一个区域，

第三章 应　　用

可以相信，几何和分析中的工具将被发现是很有用处的。

——陈省身

泛复变函数虽然刚露出一点青翠的幼芽，它的面貌现在还没有十分清楚地被人们认识，但即使在这种情况下，也可发现它会有许多用途。本章介绍的只是作者囿于桃核中的感知。但这一初步应用也可以窥见泛复变函数与各重要学科的联系。它的引进已经给其它数理科学带来一点新意。

§35 平面复函与力学

本节中，我们观察一下平面复函所形成的一种最简单的映射，并分析它的物理意义：

$$z' = az \tag{108}$$

其中$z=\zeta+\xi\omega$，$z'=\zeta'+\xi\omega$，$|a|_M=1$。

我们首先分别在C、P、H中将a写成指数式。因为$r=|a|_M=1$，所以有

$$\begin{aligned}
&C \quad a=\alpha+\beta i=\cos\theta+i\sin\theta \qquad \theta=\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}\\
&P \quad a=\alpha+\beta k=1+\theta k \qquad \theta=\beta\\
&H \quad a=\alpha+\beta j=\operatorname{ch}\theta+j\operatorname{sh}\theta \qquad \theta=\operatorname{arth}\frac{\beta}{\alpha}
\end{aligned} \tag{109}$$

因此映射（108）是下面三种变换

$$
\begin{aligned}
C \quad & \zeta' + \xi' i = (\cos\theta + i\sin\theta)(\zeta + \xi i) \\
P \quad & \zeta' + \xi' k = (1 + k\theta)(\zeta + \xi k) \\
H \quad & \zeta' + \xi' j = (\mathrm{ch}\theta + j\mathrm{sh}\theta)(\zeta + \xi j)
\end{aligned}
\tag{110}
$$

将它们乘开，对照实部和虚部，可得实变换：

$$
C \quad \begin{cases} \zeta' = \zeta\cos\theta - \xi\sin\theta \\ \xi' = \zeta\sin\theta + \xi\cos\theta \end{cases} \tag{111}
$$

$$
P \quad \begin{cases} \zeta' = \zeta \\ \xi' = \zeta\theta + \xi \end{cases} \tag{112}
$$

$$
H \quad \begin{cases} \zeta' = \zeta\mathrm{ch}\theta + \xi\mathrm{sh}\theta \\ \xi' = \zeta\mathrm{sh}\theta + \xi\mathrm{ch}\theta \end{cases} \tag{113}
$$

当我们赋予变量ζ，ξ等为时间t，长度x，光速c，以及物体运动速度v等意义时，即：

$$
\zeta = ct, \qquad \xi = x, \qquad \beta/\alpha = v/c \tag{114}
$$

时，三种变换形成了不同的力学系统的基础变换。

首先，在抛物平面P上，（112）式构成伽里略变换：

$$
\begin{cases} t' = t \\ x' = vt + x \end{cases} \tag{115}
$$

它是牛顿经典力学的基础。我们把它叫做抛物力学。

其次，在双曲平面H上，(113)式构成劳伦兹变换：

$$
\begin{cases} ct' = \dfrac{c^2 t + vx}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ x' = \dfrac{vct + cx}{\sqrt{c^2 - v^2}} \end{cases} \tag{116}
$$

它构成爱因斯坦相对性力学的基础.我们把它叫做双曲力学。

最后，在椭圆平面C上，（111）式形成如下的欧几里得变换：

$$\begin{cases} ct' = \dfrac{c^2t - vx}{\sqrt{c^2+v^2}} \\ x' = \dfrac{vct + cx}{\sqrt{c^2+v^2}} \end{cases} \tag{117}$$

莱布尼兹曾断言，经验定律仅适用于现实世界，而逻辑定律则适用于所有可能存在的世界，因之我们自然有

猜测13　欧几里得变换（117）构成一种新型力学，我们把它叫椭圆力学.这种力学也定有相对的物质效应。它可能与时空结构及超光速有关。由于$v>c$时（117）式仍有效，因此它是一种超光速力学.

几种力学中的基础变换均可统一成平面复函中最简单的线性变换（108）．自然这种简便的形式将给各种力学研究带来方便。也为探索新的力学规律提供了工具和途径。

例1　试证劳伦兹变换构成群。

证明　因劳伦兹变换即双曲线性变换（108）．今设两劳伦兹变换为

$$z'' = az',\ z' = bz\ (|a|_M = |b|_M = 1)$$

则两变换的乘积为

$$z'' = az' = abz$$

又因$|ab|_M = |a|_M|b|_M = 1$，所以$z'' = abz$仍为劳伦兹变换。另存在恒等变换$z' = z$，及$z' = az$有逆变换$z = \dfrac{1}{a}z'$，所以劳伦兹变换构成群。

例2　试求平面复数幅角加法的物理意义

解　设θ_1，θ_2为平面复数$\alpha_1 + \beta_1\omega$，$\alpha_2 + \beta_2\omega$的幅角，

且

$$\theta=\theta_1+\theta_2 \quad (118)$$

另由$\beta/\alpha=v/c$，因此在P、H、C中上式分别为

P中　$\beta/\alpha=\beta_1/\alpha_1+\beta_2/\alpha_2$

即有

$$v=v_1+v_2 \quad (118)_p$$

H中　$\mathrm{arth}\,\beta/\alpha=\mathrm{arth}\,\beta_1/\alpha_1+\mathrm{arth}\,\beta_2/\alpha_2$

由此

$$\beta/\alpha=\frac{\beta_1/\alpha_1+\beta_2/\alpha_2}{1+\beta_1/\alpha_1\cdot\beta_2/\alpha_2}$$

即有

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1}{c}\cdot\frac{v_2}{c}} \quad (118)_H$$

C中　$\mathrm{arctg}\,\beta/\alpha=\mathrm{arctg}\,\beta_1/\alpha_1+\mathrm{arctg}\,\beta_2/\alpha_2$

由此

$$\beta/\alpha=\frac{\beta_1/\alpha_1+\beta_2/\alpha_2}{1-\beta_1/\alpha_1\cdot\beta_2/\alpha_2}$$

即有

$$v=\frac{v_1+v_2}{1-\frac{v_1}{c}\cdot\frac{v_2}{c}} \quad (118)_C$$

（118）$_p$、（118）$_H$分别为抛物力学与双曲力学中的速度合成公式。因此平面复数幅角相加的物理意义是平面力学中的速度合成。（118）$_C$也就是椭圆力学中预测的速度合成公式。

在椭圆力学中$\beta/\alpha=v/c\to 0$时，（117）及（118）$_C$等均转换成了经典的抛物力学。

我深信，数学中和谐的美在自然界中定有对应。逻辑推理的结果可能弥补我们感官的不足或偏移，人类之所以先接受经典力学与相对性力学，是因为我们所处的时空及我们的感官所造成，也是人类认识的局限性所造成的。

猜测14　除线性变换（106）外，其它更为复杂的变换也能导致更为多彩的时空与力学变换，它们也将有物理实体对应.

对于数学与物理间的关系，我看应该是一对孪生姐妹.数学应该是现实世界事物的一种符号描述．因此如下的一些数学与物理间泛对称的猜测是应该成立的．

猜测15　任何物质现象，均可有一种数学描述；任何数学结果都有被描述的现象与物质.

§36　空间流场与电磁单质

众所周知，空间流场问题是不好直接处理的。往往只能化成平面流场来近似地解，我们利用泛复变函数来作一个初步的尝试。利用高维泛复函来直接描述空间流场。

本节主要讨论三次单位泛复函与空间流场的关系。

首先三次单位解析函数$f(x)=P+Qe+Re^2$，其中$x=\zeta+\eta e+\xi e^2$．的分量如下的组合后

$$v^1=P-R \qquad v^2=R-Q \qquad v^3=Q-P$$

构成向量$v=(v^1,\ v^2,\ v^3)$，它是空间不可压缩流体无旋定常流动的速度向量．因为它满足

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0 \qquad \mathrm{rot}\boldsymbol{v}=0 \tag{119}$$

例1　$f(x)=x^2=(\zeta+\eta e+\xi e^2)^2$

$$=(\zeta^2+2\eta\xi)+(\xi^2+2\zeta\eta)e+(\eta^2+2\xi\zeta)e^2$$

用它分量组合构成空间流场的速度分量是

$$v^1=P-R=(\zeta-\eta)(\zeta+\eta-2\xi)$$

$$v^2=R-Q=(\eta-\xi)(\eta+\xi-2\zeta)$$

$$v^3=Q-P=(\xi-\zeta)(\xi+\zeta-2\eta)$$

其次由解析函数的一阶解析方程组可得，

$$\nabla(R-Q)\cdot\nabla P=0 \tag{120}$$

及 $$\nabla\left[P-\frac{1}{2}(Q+R)\right]\cdot\nabla(R-Q)=0 \tag{121}$$

其中 $\nabla=i\frac{\partial}{\partial\zeta}+j\frac{\partial}{\partial\eta}+k\frac{\partial}{\partial\xi}$是梯度算子

因此可用（$R-Q$）及P或（$R-Q$）及$P-\frac{1}{2}(Q+R)$来构成共轭形式的势函数和流函数，这里除P外其它三个都是调和函数。

例 2 $f(x)=\frac{a}{x}=\frac{a}{\zeta+\eta e+\xi e^2}$

将它分蘖后可计算出P、Q、R。我们取

势函数

$$\varphi=R\quad Q=\frac{\alpha(\eta-\xi)}{\zeta^2+\eta^2+\xi^2-\zeta\eta-\eta\xi-\xi\zeta}$$

流函数

$$\psi=P-\frac{1}{2}(Q+R)=\frac{\beta\left[\zeta-\frac{1}{2}(\eta+\zeta)\right]}{\zeta^2+\eta^2+\xi^2-\zeta\eta-\eta\xi-\xi\zeta}$$

（α，β为实常数）

等值时它们都是柱面，以原点为奇点。

另外我们也可直接由三次单位复函的三个分量构成空间流动的速度场，即令

$$v^1=P,\ v^2=R,\ v^3=Q$$

只要它们满足连续性方程

$$P_\zeta+R_\eta+Q_\xi=0 \tag{122}$$

那么P、R、Q就可以构成一个空间不可压缩流场无旋流的速度场，因为由一阶解析方程组可得：

$$\mathrm{rot}v=\mathrm{rot}(Pi+Rj+Qk)$$
$$=(Q_\eta-R_\xi)i+(P_\xi-Q_\zeta)j+(R_\zeta-P_\eta)k=0$$

对于用其它泛复函直接描述空间流场也是可能的。例如利用三维调和数H^3_a变量

$$\eta=xe_1+ye_2+ze_3\qquad(e_1^2+e_2^2+e_3^2=0)$$

形成的解析函数分蘖后，（ω 是任一组实域上的基）

$$f(\eta)=\varphi_0+\varphi_1\omega_1+\varphi_2\omega_2+\cdots+\varphi_n\omega_n+\cdots$$

其中每个实分量均可成为空间具势流动的势函数。
因为有

$$\Delta\varphi_i=0,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{123}$$

这里，我们提出一个值得探讨的问题，它是由流体的速度场v 所满足的方程组(119)所引起来的。大家知道，真空中的电磁场E（E^1，E^2，E^3）和磁场H（H^1，H^2，H^3）应满足麦克斯威方程组

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}E=0\qquad \mathrm{rot}E=-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\\&\mathrm{div}H=0\qquad \mathrm{rot}H=\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\end{aligned}\tag{124}$$

这一方程组在$H=0$，即无磁场时，E满足（124），即有

$$\mathrm{div}E=0\qquad\qquad \mathrm{rot}E=0$$

同样在$E=0$，即无电场时，H也满足（124），即有

$$\mathrm{div}H=0\qquad \mathrm{rot}H=0$$

如前所述，上面两组方程都是有非零解的。因此我们导

出如下的思想：

猜测16　存在无电荷及无磁场的独立电场．我们称它为纯电场．存在无磁荷和无电场的磁场我们称它为纯磁场．

这里指的自然不是某一有限空间中由电荷或磁场延伸出的电场等，而是独立存在的真正无源的电场和无源的磁场，它们本身就是存在的实体。它们的实质也是后面所说的奇异电磁场的一类。

研究课题27　利用泛复变函数来研究纯电场与纯磁场的性质．推导出一些可能的效应，从而在实体上测得它们．我认为，它们是广泛地存在宇宙之中的．并深入直接研究空间流场．

§37　常系数齐次偏微分方程组

事实上经典复变解析函数可看成二维调和方程的通解。更一般的方程是否也能这样做呢？下面我们利用泛复变函数来研究一下

对于m个方程的线性齐次偏微分方程组

$$D_k^s(u)=0 \tag{125}$$

算符

$$D_k^s=\sum_i a_{ik}\frac{\partial^{S_k}}{\partial x_1^{P_{i1k}}\partial x_2^{P_{i2k}}\cdots\partial x_n^{P_{ink}}}$$

$$\left(\sum_j P_{ijk}=S_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots m,\ a_{ik}\text{为常数}\right)$$

引入实域泛复数扩张 $R(e_1, e_2\cdots, e_n)$，元基满足

$$\sum_i a_{ik}e_n^{P_{i1k}}e_2^{P_{i2k}}\cdots e_n^{P_{ink}}=0 \tag{126}$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

这个代数方程组叫做偏微分方程组（125）的特征方程

组

定理39 当e_i满足（126）时，泛复变量

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

有相应阶导数的泛复解析函数$f(x)$就是（125）的泛复函解。

证明 因$f(x)$是解析的，所以有

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = e_j f'(x)$$

继续进行导数运算，得

$$\frac{\partial^{s_k} f(x)}{\partial x_1^{P_{i1k}} \partial x_2^{P_{i2k}} \cdots \partial x_n^{P_{ink}}} = f_{(x)}^{(s_k)} e_1^{P_{i1k}} e_2^{P_{i2k}} \cdots e_n^{P_{ink}}$$

代入$D_K^S(u)$中，有

$$D_K^S(f) = f_{(x)}^{(s_k)} \sum a_{ik} e_1^{P_{i1k}} e_2^{P_{i2k}} \cdots e_n^{P_{ink}} = 0$$

即$f(x)$是方程（125）组的泛复函解。

定义56 上述形成的泛复函解$f(x)$叫做（125）的特征泛复函解。

如果将$f(x)$在某泛复数空间中进行分蘖，则有

定理40 $f(x)$在某泛复数X内分蘖后，其分量f_i是方程组(125)在X分量域上的解

证明 设泛复数x在分量域E上的基为ω_1，$\omega_2, \cdots\cdots, \varphi_t$，则$f(x)$可分为：

$$f(x) = f_1\omega_1 + f_2\omega_2 + \cdots + f_t\omega_t$$

其中 $f_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E$。

由于运算子D_K^S是线性的，因而

由 $D_K^S[f(x)] = 0$

得 $D_K^S(f_1)\omega_1 + D_K^S(f_2)\omega_2 + \cdots + D_K^S(f_t)\omega_t = 0$

因ω_i是E上线上性无关的．所以

$$D_K^s(f_1)=D_K^s(f_2)=\cdots=D_K^s(f_t)=0$$

即f_i是方程组（125）在E中的解

推论 方程组(125)特征泛复函解的实或复分量是(125)的实或复解。

例1 观察仅有一式的五阶方程

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}-\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}=0 \tag{127}$$

其特征方程是

$$e_1^5-e_2^5=0 \tag{128}$$

但如果我们将e_1看成主单位元，以（128）为示性方程的泛复数就同构于五次单位数N_1^5，这样并不失一般性。因此取泛复变量

$$z=x+ye \qquad (\text{其中} e^5=1)$$

的解析函数$f(z)$是（127）的特征泛复函解。分蘖后

$$f(z)=P+Qe+Re^2+Se^3+Te^4$$

其中P、Q、R、S、T都是满足（127）的实变量x、y的实函数。正如经典复函的实部与虚部相对于二维调和方程一样，某种意义上，这些解是（127）的实"通解"．即任意实解都是它的一个实分量。

例2 观察一个三阶方程组

$$u_x+u_y+u_z=0 \tag{129}$$

$$u_{x^3}+u_{y^3}+u_{z^3}=0$$

特征方程 $e_1+e_2+e_3=0$ （130）

$$e_1^3+e_2^3+e_3^3=0$$

设主单位元为$e_1=1$，$e_2=e$，则$e_3=-e-1$。（130）式等价于

$$e^2+e=0 \tag{131}$$

这种泛复数同构于平面双曲复数H。

引入变量　$\eta = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (x-z) + e(y-z)$

则解析函数$f(\eta)$是（129）的特征泛复函解。将$f(\eta)$分蘖：

$$f(\eta) = u(x, y, z) + ev(x, y, z)$$

则u，v是（129）的实解。也是某种意义下的实通解。

猜测17　方程组（125）对应的泛复数是有限维时，它的任一实解定是特征泛复函解的一实分量.

§38　力学中常见的几个方程

本节中讨论力学中常见的几个方程及这些方程解的某些性质。也是作为上节进一步的例子.

例1　三维拉普拉斯方程

$$\Delta u = u_{x^2} + u_{y^2} + u_{z^2} = 0 \qquad (132)$$

可引进三维调和数H_a^3中的泛复变量

$$\eta = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

其中　$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0$

η的任一解析函数$f(\eta)$就是$\Delta u = 0$的特征泛复函解。将$f(\eta)$在实域分蘖后，每一分量就是$\Delta u = 0$的实解.

因为三维调和数H_a^3有$2n+1$个n阶整基.因此满足$\Delta u = 0$的n阶实齐次多项式将有相互独立的$2n+1$个。利用调和数的运算，极易得到它们. 因为它们就是泛复函$f(\eta) = \eta^n$的各分量.

从这里可以看出三维以上调和方程与二维调和方程的解

存在的根本差别：随着n趋向无限大，它们的n次齐次式的线性无关解也无限增多。而二维n阶整调和函数仅有两个共轭解。

例2 三维波动方程

$$u_{x^2}+u_{y^2}+u_{z^2}-a^2u_{t^2}=0 \tag{133}$$

可引进三维波数W^3中的变量

$$\zeta=xe_1+ye_2+ze_3+te_4 \tag{134}$$

其中 $e_1^2+e_2^2+e_3^2-a^2e_4^2=0$

ζ的任意泛复解析函数$f(\zeta)$就是波动方程（133）的特征泛复函解，它在实域中分蘖后每一分量就是（133）的实解。它的线性无关的n次齐次式将有$(n+1)^2$个，它们是$f(\zeta)=\zeta^n$的分量。

由于随n增大，多维调和函数与波函数的整函数无限增多。而且由于H_a^3、W^3等基的无限性，一般解析函数可有无限多的分蘖，这造成对上述函数研究带来不便，因之，我们可对基采取“截断”措施。即令基除满足特征方程外还满足其它条件。这时所得的泛复函解及实解也仍满足原方程，但这已经是特解了。即只能得到原方程的部份解。

例如，取椭圆双曲变量

$$\zeta=x+\sqrt{3}\,yi+zj+\frac{1}{a}tij \tag{135}$$

的任意解析函数

$$f(\zeta)=P+Qi+Rj+Sij$$

$f(\zeta)$就是波动方程（133）的椭圆双曲复函解。P、Q、R、S是它的实解。

例3 超定方程组

$$\begin{cases} u_x + u_y + u_z = 0 \\ u_{x^2} + u_{y^2} + u_{z^2} = 0 \\ u_{x^4} + u_{y^4} + u_{z^4} = 0 \end{cases} \tag{136}$$

特征方程组为

$$\begin{aligned} & e_1 + e_2 + e_3 = 0 && ① \\ & e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 && ② \\ & e_1^4 + e_2^4 + e_3^4 = 0 && ③ \end{aligned} \tag{137}$$

由于从①、②可导出③，因此独立的特征方程只有①、②。又设主单位元$e_1 = 1$，而e_2和e_3在①中相关，因此泛复数是二维，与C同构。所以可取①、②的复解

$$e_1 = 1, \quad e_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad e_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

这时变量

$$\xi = x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)y + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$$

的任意解析函数

$$f(\xi) = u + iv$$

就是(136)的复解，u、v就是（136）的实解。

例 4 双调和方程

$$\Delta^2 U = U_{x^4} + 2U_{x^2}U_{y^2} + U_{y^4} = 0 \tag{138}$$

特征方程是 $e_1^4 + 2e_1^2 e_2^2 + e_2^4 = 0$ (139)

我们设主单位元$e_1 = 1$后就成为双调和数的示性方程。取双调和变量$z = x + ye$，它的解析函数

$$f(z) = P + Qe + Re^2 + Se^3$$

就是$\Delta^2 u = 0$的特征泛复函解，P、Q、R、S 是实解。

定理41 双调和方程 $\Delta^2 u = 0$ 的实通解与双调和泛复解析函数$f(z) = P + Qe + Re^2 + Se^3$分量全同。

（证明见参考文献43）

上面我们已经见到许多方程均可用泛复函数来表达它们的特征泛复函解与实解。因之，我们可用研究泛复函的方法来研究这些方程。象推导与它们等价的一阶方程组、找出与路径无关的积分等等。

例如双调和一阶解析方程组是

$$P_y = -S_x,\ Q_y = P_x,\ R_y = Q_x - 2S_x,\ S_y = R_x.$$

三维调和广义C—R方程是无穷形式。设

$$f(\eta) = f^{(0)} + e_1 f^{(1)} + e_2 f^{(2)} + e_3 f^{(3)} + e_1 e_2 f^{(12)} + \cdots\cdots$$

则有 $f^{(0)}_x = f^{(0)}_y = f^{(0)}_z = 0$

$f^{(1)}_x = f^{(2)}_y = f^{(3)}_z$

$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$

它们都是从等式$e_2 e_3 f_x = e_3 e_1 f_y = e_1 e_2 f_z$导出。

又如双调和函数可作与路径无关的积分

$$\int_c (P + Qe + Re^2 + Se^3)\,d(x + ye)$$

$$= \int_c Pdx - Sdy + e\int_c Qdx + Pdy + e^2\int_c Rdx$$

$$+ (Q - 2S)dy + e^3\int_c Sdx + Rdy$$

三维调和泛复函与路径无关的积分也是无限形式的。

$$\int_c f_{(\eta)}d\eta$$

$$= e_1\int_c f^{(0)}dx + e_2\int_c f^{(0)}dy + e_3\int_c f^{(0)}dz$$

$$+ e_1 e_2\int_c f^{(1)}dy + f^{(2)}dx + e_2 e_3\int_c f^{(2)}dz + f^{(3)}dy$$

$$+ e_3 e_1\int_c f^{(3)}dx + f^{(1)}dz + \cdots\cdots$$

还有各种方程对应泛复函的一些特性等等读者可自行研究探讨。

猜测18　方程组(125)的特征方程（126）所对应的泛复数是无限维时，它的实通解定为其特征泛复函解实分量的线性组合．这种组合也可能是无限的。

§39　多个未知函数常系数偏微分方程组

为了对用泛复函来解多个未知函数常系数线性齐次偏微分方程组的方法有感性认识，我们先观察几个实例。

例1　设$u=(u^1,\ u^2,\ u^3)$，试求下列方程组的解

$$\mathrm{div}\,u=0,\qquad \mathrm{rot}\,u=0.$$

解　将上述方程写成分量微分形式为

$$\begin{cases} u^1_x+u^2_y+u^3_z, \\ u^3_y-u^2_z=0,\ u^1_z-u^3_x=0,\ u^2_x-u^1_y=0. \end{cases} \tag{140}$$

设　$u^1=f(\eta)$，$u^2=g(\eta)$，$u^3=h(\eta)$为泛复变量$\eta=xe_1+ye_2+ze_3$的解析函数。代入（140）式，得

$$\begin{cases} e_1f'+e_2g'+e_3h'=0 \\ \qquad -e_3g'+e_2h'=0 \\ e_3f' \qquad -e_1h'=0 \\ -e_2f'+e_1g' \qquad =0 \end{cases} \tag{141}$$

因要求f'，g'，h'有非零解，则（141）中任取三个方程的系数行列式均应为零．从这四个行列式为零，可导得其充要条件是e_1，e_2，e_3满足：

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=0 \tag{142}$$

在上述条件下，如果不考虑平凡解，可将（141）中的 f'，g'，h'看成f，g，h，，则从其中解得

$$\frac{f}{e_1}=\frac{g}{e_2}=\frac{h}{e_3} \tag{143}$$

这样取示性方程是(142)的泛复变量$\eta=xe_1+ye_2+ze_3$的任意解析函数$f=f(\eta)$并由（143）求出g、h。将它们分解后。每一组对应的实分量（$f^{(i)}$，$g^{(i)}$，$h^{(i)}$）就是(140)的一组解（u^1，u^2，u^3）。

例2　广义M—T方程组，形式为

$$\begin{aligned}-P_t+Q_x+R_y+S_z&=0\\ P_x+Q_t-R_z+S_y&=0\\ P_y+Q_z+R_t-S_x&=0\\ P_z-Q_y+R_x+S_t&=0\end{aligned} \tag{144}$$

当$P_t=Q_t=R_t=S_t=0$时，即变成在流体力学、弹性力学、电磁与激光研究中均有广泛应用的*Moisil—Theodoresco*方程，参看文献41。

解广义M—T方程，可设泛复变量及函数

$$\eta=te_0+xe_1+ye_2+ze_3 \tag{145}$$

$$P=P(\eta),\ Q=Q(\eta),\ R=R(\eta),\ S=S(\eta) \tag{146}$$

代入（144），得：

$$\begin{aligned}-e_0P'+e_1Q'+e_2R'+e_3S'&=0\\ e_1P'+e_0Q'-e_3R'+e_2S'&=0\\ e_2P'+e_3Q'+e_0R'-e_1S'&=0\\ e_3P'-e_2Q'+e_1R'+e_0S'&=0\end{aligned} \tag{147}$$

这个方程组要求P'，Q'，R'，S'有非零解，其充要条件是

$$\begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (148)$$

即是 $(e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)^2 = 0$

那么我们可将（148）作为泛复数的示性方程。其中变量（145）构成解析函数（146）。在不考虑平凡解时（146）将满足（147）去掉导数的线性方程。这样（146）的各对应实分量就是（144）的一组实解。

上面我们看了两个一阶方程组，现在我们考察一组高阶方程：

例 3　高阶方程组

$$U_{y^3} + V_{xyz} = 0$$

$$U_{x^5} + V_{z^5} = 0 \qquad (149)$$

我们引入泛复变量η及其解析函数：

$$\eta = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

$$U = U(\eta), \quad V = V(\eta)$$

将它们代入（149），得

$$e_2^3U^{(3)} + e_1e_2e_3V^{(3)} = 0 \qquad ①$$

$$e_1^5U^{(5)} + e_3^5V^{(5)} = 0 \qquad ② \qquad (150)$$

将①对η取导两次，得$U^{(5)}$，$V^{(5)}$有解的充要条件也即泛复数示性方程

$$\begin{vmatrix} e_2^3 & e_1e_2e_3 \\ e_1^5 & e_3^5 \end{vmatrix} = e_2e_3(e_2^2e_3^4 - e_1^6) = 0 \qquad (151)$$

上述泛复数是无限维的，但如果我们取双曲数的元素为基可得特解，即取特值

$$e_1 = e_3 = 1 \qquad e_2 = j$$

则可得 $\eta=x+z+jy$,

$$U=U(\eta)=\varphi(x,y,z)+j\phi(x,y,z)$$

由① $V=-U+a\eta^2+\beta\eta+\gamma=\theta(x,y,z)+j\omega(x,y,z)$

(φ, θ)，(ϕ, ω) 都是（149）的特解。

下面我们观察一般的情况。设$u=(u_1, u_2, \cdots, u_s)$是变量$x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$的函数，将常系数线性方程组简写成

$$L(u)=a\frac{\partial^\mu u}{\partial x^\mu}=0 \qquad (152)$$

其中μ随方程而异。a为随项而异的常数。因而L也随方程而异。

引进泛复变量 $x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_me_m$,

将X的泛复解析函数，u_1, u_2, …, u_s代入（152），可得

$$\sum_{\lambda=1}^{s} b^\lambda u_\lambda^{(\mu)}(x)=0 \qquad (153)$$

将（153）对x取导，使各方程同阶。因此可得$u_\lambda^{(\mu)}$有解的充要条件，也即泛复数的示性方程：

$$|b|=0 \qquad (154)$$

$|b|$是（153）的系数行列式。

定义60 （154）式为示性方程所决定的泛复数叫做偏微方程组（152）的特征泛复数。

然后由（153）式解出$u_\lambda(x)$。我们有

定理42 特征泛复变量x所确定的满足（153）式的解析函数$u_\lambda(x)$的各分冀中对应的分量都满足方程组（152）。

证明参见文献49。

猜测19 偏微分方程组(152)有解的充要条件是其特征泛复数的示性方程组相容。其即特征方程组有泛复数解.

猜测20 当(152)特征方程组(154)形成复数有限时，任一实解均是这种方法泛复函解的一分量，无限时是分量的有限或无限线性组合。

§40 二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性方程组

题中方程及其它常系数线性方程实为研究偏微分方程的门户，已有较详的分类研究[18]。但我们可给出一种整体结果。这种方程的一般形式为：

$$D(u,v)=a_1U_{x^2}+a_2V_{x^2}+2b_1U_{xy}+2b_2V_{xy}+c_1U_{y^2}+c_2V_{y^2}=0$$

$$L(u,v)=a_3U_{x^2}+a_4V_{x^2}+2b_3U_{xy}+2b_4V_{xy}+c_3U_{y^2}+c_4V_{y^2}=0 \qquad (155)$$

定理43 方程组(155)有四阶导数的解 U 及 V 均满足四阶方程：

$$\alpha W_{y^4}+\beta W_{y^3x}+\gamma W_{x^2y^2}+\delta W_{x^3y}+\varepsilon W_{x^4}=0 \qquad (156)$$

其中

$$\alpha=\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{vmatrix},\quad \beta=2\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_3 & c_4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ b_3 & b_4\end{vmatrix}$$

$$\gamma=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ c_3 & c_4\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ a_3 & a_4\end{vmatrix}$$

$$\delta=2\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_3 & b_4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_3 & a_4\end{vmatrix}\quad \varepsilon=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{vmatrix}$$

证明 将(155)的第一式对 y 取两次偏导并乘以 c_4 记为 $c_4D_{y^2}$ 等等。则由

$$c_4 D_{y^2} - c_2 L_{y^2} + a_4 D_{x^2} - a_2 L_{x^2} + 2b_4 D_{xy} - 2b_2 L_{xy} = 0$$

可得U满足方程组（156）。又由

$$a_1 L_{x^2} - a_3 D_{x^2} + c_1 L_{y^2} - c_3 D_{y^2} + 2b_1 L_{xy} - 2b_3 D_{xy} = 0$$

可得V也满足方程组（156）。

在保持一般性的情况下，我们不讨论一些平凡解。例如设方程（156）中α，ε不同时为零，否则（155）蜕化过简。

若$\alpha \neq 0$，设$z = x + ye$，其中e的示性方程为

$$\alpha e^4 + \beta e^3 + \gamma e^2 + \delta e + \varepsilon = 0 \qquad (157)$$

解析函数可写成

$$f(z) = P + Qe + Re^2 + Se^3 \qquad (158)$$

由等式 $ef'(z) = ef_x = f_y$

可导出广义C—R方程组为：

$$\alpha P_y + \varepsilon S_x = 0 \quad ①$$
$$\alpha Q_y - \alpha P_x + \delta S_x = 0 \quad ② \qquad (159)$$
$$\alpha R_y - \alpha Q_x + \gamma S_x = 0 \quad ③$$
$$\alpha S_y - \alpha R_x + \beta S_x = 0 \quad ④$$

定理44　方程组（159）的解定满足（156）；方程（156）的解，定为解析函数（158）分量之一。

证明　由定理39和20可知（159）的解定满足（156）。现证（156）的解W为（158）中一分量。

令　$S = W$

由①　$P = -\dfrac{\varepsilon}{\alpha}\displaystyle\int S_x dy$

由④　$R = \displaystyle\int S_y dx + \dfrac{\beta}{\alpha} S$

由③　$Q = \displaystyle\iint S_{y^2} dx^2 + \dfrac{\beta}{\alpha}\int S_y dx + \dfrac{\gamma}{\alpha} S$

代入②，由于S满足方程（156），②式的左边

$$\alpha\iint S_{y^3}dx^2+\beta\int S_{y^2}dx+\gamma S_y+\varepsilon\int S_{x^2}dy$$

$$=\iiint(\alpha S_{y^4}+\beta S_{y^3x}+\gamma S_{y^2x^2}+\delta S_{yx^3}+\varepsilon S_{x^4})dx^2dy=0$$

这说明，由$S=W$所导出的P、Q、R满足（159），即W是（158）的一个分量。

定理45 方程（159）的一组解P、Q、R、S分别均为满足方程组（155）解中的一个。

证明 设$\varphi(z)=P_1+Q_1e+R_1e^2+S_1e^3$为满足（159）所形成的解析泛复函（158）。并设$a_i+2b_ie+c_ie^2$，$i=1$，2，3，4不同时为零及零因子，否则（155）蜕化过简。例如，设$a_2+2b_2e+c_2e^2$不为零及零因子。则可令，$\varphi(z)=U$，并设

$$\psi(z)=-\frac{a_1+2b_1e+c_1e^2}{a_2+2b_2e+c_2e^2}\varphi(z)=P_2+Q_2e+R_2e^2+S_2e^3$$

$$=V$$

代入计算即易知$\varphi(z)$，$\psi(z)$，满足方程组（155）。另将$\varphi(z)$、$\psi(z)$分蘖后，由于D、L是线性的，可得：

$$D(P_1,P_2)+eD(Q_1,Q_2)+e^2D(R_1,R_2)+e^3D(S_1,S_2)=0$$

$$L(P_1,P_2)+eL(Q_1,Q_2)+e^2L(R_1,R_2)+e^3L(S_1,S_2)=0$$

所以P、Q、R、S均满足（155）。

综合以上三个定理可得：

定理46 在上述意义下，方程组（155），（156）、（159）等价。它们的解由泛复函（158）决定，即实解为（158）的分量。

从本节可看出泛复函方法是研究偏微分方程的基础的有

数方法。

研究课题28　利用本节方法具体研究一下各种更多未知函数，更多自变量，阶数更高的常系数线性方程组的规律。

习　题　八

1　伽里略变换与欧几里得变换是否构成群？试证明之。

2　椭圆力学中，长度为 l 的物体以速度 v 运动时，其伸缩情况如何？

3　椭圆力学中，以速度 v 运动的时钟相对于参考系中的时钟变化如何？

4　椭圆力学中超光速运动能否存在？双曲力学中的超光速运动预示着什么？

5　试对三次单位数构成的空间泛复函：$f(x)=x^3$ 用§36 例1的方法构成一定常流体的速度场。

6　用三次单位泛复函 $f(x)=x^2+x$ 成一空间流动的流函数和势函数。

7　采用三维调和泛复函 $f(\eta)=\eta^3=(xe_1+ye_2+ze_3)^3$ 一分量作为势函数，求这种空间流动的速度场。

8　对纯电场与纯磁场的数学形式各举一例。

9　求方程 $u_{x4}+u_{y4}=0$ 的特征泛复函解。并求它的广义 $C—R$ 方程组。

10　求方程 $u_{x3}-u_{y3}=0$ 的特征泛复函解。并证明它的广义 $C—R$ 方程组与原方程等价。

11　求方程 $u_{x2}+u_{y2}-u_{t2}=0$ 的特征泛复函解，并求出它4阶多项式解的全部。

12　用实际的函数例子，如幂函数或指数函数等验证§39中的各例。

13　求方程组的特征泛复函解及实解。

① $\begin{cases} u_x + u_y - u_z = 0 \\ u_{x^2} + u_{y^2} - u_{yz} = 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} u_x + v_y = 0 \\ u_{xz} + v_{yz} = 0 \end{cases}$

③ $\begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ u_{x^3} - v_{y^3} = 0 \end{cases}$

④ $\begin{cases} u_x + v_y + w_z = 0 \\ u_{x^2} + v_{y^2} + w_{z^2} = 0 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} u_x + v_y - w_t = 0 \\ u_{xz} + v_{yz} - w_{tz} = 0 \end{cases}$

14 求以下方程组等价的四阶方程和一阶方程组

$$\begin{cases} 2u_{x^2} + v_{x^2} + 4u_{xy} - 2v_{xy} + u_{y^2} - v_{y^2} = 0 \\ u_{x^2} + 3v_{x^2} + 2u_{xy} + 2v_{xy} - u_{y^2} + 2v_{y^2} = 0 \end{cases}$$

15 试求平面弹性静力学方程组

$$\mu_i \Delta u_i + (\lambda_i + \mu_i)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y}\right) = 0$$

$$\mu_i \Delta v_i + (\lambda_i + \mu_i)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y}\right) = 0$$

其中，$i = 1, 2, 3$，λ和μ为常数。

的特征泛复函解及实解。其中，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$。

16 写出§37例1中泛复解析函数的广义$C—R$方程组，并证明其与原方程等价。

§41 某些变系数偏微分方程组

以上我们所考察的泛复变量每一分量多是独立的实变

量，如果这些分量是一些相关的实变函数时，我们可以发现它的解析函数将满足一类变系数的偏微分方程组。

首先我们观察一元的情况。引进泛复数$S(e)$中的变量

$$z=\zeta_1e_1+\zeta_2e_2+\cdots\zeta_ne_n$$

其中，$\zeta_i=\zeta_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)\in R$。

我们看看z的解析泛复函$f(z)$所应满足的条件。

设 $f(z)=f_1e_1+f_2e_2+\cdots+f_ne_n$

由
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial x_i},\quad \frac{\partial f}{\partial x_j}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial x_j}$$

得
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\ \frac{\partial z}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}\ \frac{\partial z}{\partial x_i}\tag{166}$$

用基表示后展开

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}e_\alpha\right)\left(\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial z_\beta}{\partial x_j}e_\beta\right)=\left(\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j}e_\beta\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i}e_\alpha\right)$$

即
$$\sum_{\alpha\beta=1}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\ \frac{\partial z_\beta}{\partial x_j}e_\alpha e_\beta=\sum_{\alpha\beta=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j}\ \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i}e_\beta e_\alpha$$

$$\sum_{\alpha\beta\lambda=1}^{n}\gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\ \frac{\partial z_\beta}{\partial x_j}e_\lambda=\sum_{\alpha\beta\lambda=1}^{n}\gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j}\ \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i}e_\lambda$$

对照各分量，有

$$\sum_{\alpha\beta=1}^{n}\gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\ \frac{\partial z_\beta}{\partial x_j}=\sum_{\alpha\beta=1}^{n}\gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j}\ \frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i}\tag{161}$$

$$(i,\ j,\ \lambda=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

定理47 泛复解析函数$f(z)$的各分量满足广义$C—R$方程组。(161)．

利用以前类似的方法也可得

定理48 泛复解析函数$f(z)$可作与路经无关的积分

$$\int f(z)dz=\int(f_1e_1+f_2e_2+\cdots+f_ne_n)d(\zeta_1e_1+\zeta_2e_2+\cdots$$

$$+\zeta_ne_n)=\sum_{\alpha=1}^{n}e_\alpha\int\Big(\sum_{\beta=1}^{n}\varphi_{\beta\alpha}\Big)d\zeta_\lambda$$

其中

$$\varphi_{\beta\alpha}=\sum_{\sigma=1}^{n}\gamma_{\sigma\beta}^{\alpha}f_\sigma,\quad d\zeta_\lambda=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial\zeta_\lambda}{\partial x_\mu}dx_\mu$$

例 1 §38例3中方程组（136）的解可化成变量ξ的解析泛复函：$f(\xi)=u+iv$。

$$\xi=xe_1+ye_2+ze_3=\zeta_1+\zeta_2 i$$

$$\zeta_1=x-\frac{1}{2}(y+z),\quad \zeta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}(y-z)$$

对于u、v可作与路径无关的积分

$$\int udx-\Big(\frac{1}{2}u+\frac{\sqrt{3}}{2}v\Big)dy+\Big(u+\frac{\sqrt{3}\ v}{2}\Big)dz$$

$$+\,i\int udx-\Big(\frac{1}{2}v-\frac{\sqrt{3}}{2}u\Big)dy+\Big(v-\frac{\sqrt{3}}{2}u\Big)dz$$

例 2 如果以$z=x^2+y^2+j(e^x+\cos y)$为变量的解析函数$f(z)=u+jv$它所满足的广义C—R方程即（161）式为：

$$(u_x+jv_x)(2y-j\sin y)=(u_y+jv_y)(2x+je^x)$$

得：
$$\begin{cases}2yu_x-\sin y v_x=2xu_y+e^x v_y\\ -\sin u_x+2yv_x+2xv_y=e^x u_y+2xv_y\end{cases}$$

与路径无关的积分是将下式分蘖

$$\int(u+jv)d[x^2+y^2+j(e^x+\cos y)]$$

例 3 利用 n 阶微量数N_0的变数

$$z=\zeta_0+\zeta_1 e+\zeta_2 e^2+\cdots+\zeta_{n-1}e^{n-1}$$

其中 $\zeta_i=\zeta_i(x_1, x_2, \cdots, x_l)$. 它的泛复解析函数

$$f(z)=f_0+f_1 e+f_2 e^2+\cdots+f_{n-1}e^{n-1}$$

满足

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_j}=\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_j}\frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_i} \qquad (m<n)$$

可作与路径无关的积分

$$\int\sum f_i d\zeta_j \quad (0\leqslant i+j<n)$$

利用多元泛复函，把变量$z_\sigma=\sum_{i=1}^{n\sigma}\zeta_{\sigma i}e_{\sigma i}$中的分量$\zeta_{\sigma i}$视为某些实变量$x_1$，$x_2$，…，$x_m$的函数时，广义 C—R 方程（101）将成为多种形式变系数方程.

例 4 利用平面泛复数. 系性方程$\omega^2=\lambda$（$\lambda\in R$）. 中间变量$z_1=\varphi+\phi\omega$，$z_2=\xi+\zeta\omega$其中 φ、ϕ、ξ、ζ、为独立实变量x、y、z的函数. 则$F(z_1, z_2)=u+\omega v$的广义C—R方程为

$$\begin{vmatrix} u_x+v_x\omega & \varphi_x+\phi_x\omega & \xi_x+\zeta_x\omega \\ u_y+v_y\omega & \varphi_y+\varphi_y\omega & \xi_y+\zeta_y\omega \\ u_z+v_z\omega & \varphi_z+\varphi_z\omega & \xi_z+\zeta_z\omega \end{vmatrix}=0$$

即可得变系数形式广义C—R方程组

$$\begin{cases} A_1U_x+B_1U_y+C_1U_z+D_1V_x+E_1V_y+F_1V_z=0 \\ A_2U_x+B_2U_y+C_2U_z+D_2V_x+E_2V_y+F_2V_z=0 \end{cases} \qquad (162)$$

其中 $A_1=\varphi_y\xi_z+\lambda\phi_y\xi_z-\varphi_z\xi_y-\lambda\phi_z\xi_y$ 等.

研究课题29 研究本节泛复解析函数所对应的广义 $C-R$ 方程的各具体形式，并予分类研究本节中泛复广义解析形式.

§42 广域扩展原理

尊敬的读者在熟悉了广域及泛复数的性质后，可能越来越感到它们许多性质都非常类似于我们熟悉的实数。的确是这样，正象古典复变解析函数可以看成实变可微函数经过自变量代换$z=x+iy$而得到一样，泛复变函数则可看成实函经过泛复数代换 $x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$ 得到。这个变换我们叫它广域代换。因而我们有如下一个思想，不妨称它为广域扩展原理：

原理 一切实域中的方法和结果若不涉及零因子运算（如运算不涉及因式分解、广域线性相关等），则经广域代换后，在形式上仍然成立。

当然经广域扩展后实域上的结果将出现分蘖状态，一个结果可能出现形态各异的一组结果。

例1 各种代数等式，如牛顿二项式当x、y是泛复数时依然成立。

$$(x+y)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^{n-1}xy^{n-1}+y^n$$

例2 线性代数方程的解，即方程组 $AX=B$ 当 $detA$ 不为零或零因子时，则有解$X=A^{-1}B$。

例3 各类函数等式依然成立。例如在椭圆数和双曲数中，函数等式 $e^xe^{-x}=1$ 当$x=i\theta$，及$x=j\theta$时体现为

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,\ \mathrm{ch}^2\theta-\mathrm{sh}^2\theta=1.$$

定义61 实域等式经泛复数代换一次所得的等式叫做一级广域扩展等式。再经一次广域代换所得等式叫二级广域扩

展等式。如此类推。

例 4　将$e^{x}e^{-x}=1$一级椭圆复数扩展等式$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$再进行$\theta=\varphi+i\phi$代换，得二级椭圆复数扩展等式：

$$\cos^2\varphi\operatorname{ch}^2\phi-\sin^2\varphi\operatorname{sh}^2\phi+\sin^2\varphi\operatorname{ch}^2\phi-\cos^2\varphi\operatorname{sh}^2\phi=1$$

即　$\operatorname{ch}^2\phi-\operatorname{sh}^2\phi=1$．及$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$．

例 5　各种变换有新形式，如§35中的线性变换，$z'=az$。我们已经见到它的一级平面复数广域扩展的物理意义。

例 6　各种积分等式都有同样的形式结果。如为泛复数时，广义莱布尼兹公式成立：

$$\int_a^b f'(z)dz=f(b)-f(a)$$

例 7　各种积分变换，当其中参量为泛复数时，依然成立。例如拉氏变换中 t 与$\frac{1}{S^2}$的对应，在双曲复数H中若 $t=x+jy$，$S=U+jV$，则变成了对应：

$$(x,\ y)\quad 与\left[\frac{U^2+V^2}{(U^2-V^2)^2},\ \frac{-2UV}{(U^2-V^2)^2}\right]$$

例 8　各种泛复变函数的微分与积分在形式上与实函中完全相同。如z为泛复数时，有

$$(\sin z)'=\cos z,\quad \int \ln z dz=z\ln z-z+c 等等。$$

例 9　各种微分方程广域扩展后，解的方法和形式与实域上微分方程类同。

微分方程广域扩展后其内容甚为丰富，形式较为复杂。但初步可分为两大类，在后两节中将专门讨论。

还可举出许许多多遵循广域扩展原理的例子，几乎一切实域中的形式关系，均可在广域和泛复数中有所对应。而这

些对应形式的研究，又有助于实域中其它问题的解决。如实域中许多微分方程的解其它方法无力时，可能用此法解决。包括一些非线性方程组也一样可以解决。参见文献23。

在这种原理的引导下，我们也可对某些结果进行预测，例如我们虽然对高维代数拓扑不很清楚，但我们有理由作如下预测。

猜测21　设 C_μ 是具有椭圆基 i_μ，$i_\mu^2+1=0$ 的空间，$z_\mu \in C_\mu F$ 是具有 k 个椭圆型变量的解析函数，则

$$\int_{c1}\int_{c2}\cdots\int_{ck} \frac{F(z_1, z_2, \cdots, z_k, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)}{(z_1-z_1^0)(z_2-z_2^0)\cdots(z_k-z_k^0)} dz_1 dz_2\cdots dz_k$$

$$\overset{\cdots}{=}(2\pi)^k \Pi i_k F(z_1^0, z_1^0, \cdots, z_k^0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \tag{163}$$

其中　$c_\mu \subset C_\mu$ 是绕 z_μ^0 点的闭曲线.

研究课题30　对各种实域中的结果、规律进行具体的广域代换，研究各种广域扩展结果的新规律。并对它们进行分类。以及将这些新规律研究加以应用。例如现今可得解析解的常微分方程经广域代换后则可得一大类偏微分方程解。在非线性方程中作用就更明显了.

§43　微分方程在泛复函中的演化(Ⅰ)

泛复函中的微分方程实质是一个算子微分方程。但它更接近现今的实微分方程，因此我们沿用这一名称，它与实微分方程的关系，一般可以分为两大类。这两类也是泛复函中微分方程的的两大类。

微分方程的亚广域解

定义62　如果微分方程 $D[U(x)]=0$（U，x 为向量）的自变量 x 仍保留为实变量，未知函数 $U(x)$ 为泛复变形式

则称解函数$U(x)$为它的**亚广域解**。原方程所对应的实方程组则称它的**亚广域扩展方程组**。

例 1 最简单的微分方程

$$U_x U_y = 0 \tag{164}$$

在双曲复数中不再只有单变量函数解而有

$$U = p + qj = \varphi(x) - \phi(y) \pm j[\varphi(x) - \phi(y)] \tag{165}$$

在 n 阶微量数中有解

$$U = \sum_{\lambda=m}^{n-1} \varphi_\lambda(x) e^\lambda + \sum_{\mu=n-m}^{n} \phi_\mu(y) e^\mu \tag{166}$$

其中φ和ϕ均为任意的可微实函。

它在双曲数中的亚广域扩展方程组是：

$$(p_x + q_x j)(p_y + q_y j) = 0$$

即 $$\begin{cases} p_x p_y + q_x q_y = 0 \\ p_x q_y + q_x p_y = 0 \end{cases}$$

它的解即是（165）。

因此各种微分方程解的形式均需要考虑它所在的泛复数的形式而定。这实质上由于微分方程在不同泛复数中演化成不同的形式。

常微分方程的亚广域扩展方程仍是常微分方程组。

例 2 非线性常微分方程组

$$dx/dt = A_1 x + \alpha A_2 y + B_1 x^2 + \alpha B_1 y^2 + 2\alpha B_2 xy$$
$$dy/dt = A_2 x + A_1 y + B_2 x^2 + \alpha B_2 y^2 + 2B_1 xy \tag{167}$$

是常微分方程

$$du/dt = AU + BU^2 \tag{168}$$

利用平面数的亚广域扩展方程组。其中

$U = x + y\omega$　$A = A_1 + A_2\omega$，$B = B_1 + B_2\omega$。$\omega^2 = \alpha$。

例如方程组

$$dx/dt = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$$

$$dy/dt = x^2 + y^2 + 4xy \tag{169}$$

是双曲数中以下方程的亚广域扩展方程：

$$dU/dt = (2+j)U^2 \quad (U = x + jy) \tag{170}$$

或 $$dV/dt = (1+2j)V^2 \quad (V = y + jx) \tag{171}$$

用通常的方法解（170）（171）即得（169）的两组解。参见文献23。

例3 常微分方程组

$$\sum_{\lambda\mu=1}^{n} \gamma_{\lambda\mu}^{\tau} y_{\lambda}(x) y_{\mu}'(x) = \varphi_{\tau}(x) \tag{172}$$

式中 $\tau = 1, 2, \cdots, n$。$\gamma_{\lambda\mu}^{\tau}$为$S(e)$的结构常数。它的实积分为

$$\sum_{\lambda\mu=1}^{n} \gamma_{\lambda\mu}^{\tau} y_{\lambda}(x) y_{\mu}(x) = 2\int \varphi_{\tau}(x) dx \tag{173}$$

因为它是由方程

$$U(x)U'(x) = \Phi(x) \tag{174}$$

经广域代换 $U = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$，$\Phi = \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \cdots + \varphi_n e_n$的亚广域扩展方程。

对于亚广域解与实解的关系，我们可有

定理49 线性偏微分方程组（175）亚广域解的各实分量是它的实解。

$$L(U) = 0 \tag{175}$$

其中 $U = (U_1, U_2, \cdots, U_k)$，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$，$L$为线性算子，且随方程而异。

证明 设（175）亚广域解为

$$U_\lambda = U_{\lambda 1} e_1 + U_{\lambda 2} e_2 + \cdots + U_{\lambda n} e_n \quad (\lambda = 1, 2, \cdots, k)$$

代入方程（175），得

$$L(U_1, U_2, \cdots, U_k) = 0$$

即 $$L\left(\sum_{\mu=1}^{n} U_{1\mu}e_\mu, \sum_{\mu=1}^{n} U_{2\mu}e_\mu, \cdots, \sum_{\mu=1}^{n} U_{k\mu}e_\mu\right) = 0$$

由于L是线性的。因而有

$$L(U_{11}, U_{21}, \cdots U_{k1})e_1 + L(U_{12}, U_{22}, \cdots U_{k2}e_2$$

$$+ \cdots + L(U_{1n}, U_{2n}, \cdots, U_{kn})e_n = 0$$

即有 $L(U_{1\lambda}, U_{2\lambda}, \cdots, U_{k\lambda}) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, k)$

研究课题31 将现有可解的各种微分方程线性、拟线性、非线性均可，进行不同的广域代换求出其亚广域扩展方程并予分类。用本节方法求得其解。还可研究其二级、三级…亚广域展方程。

§ 44 微分方程在泛复函中的演化(II)

定义63 如果微分方程$D[U(x)] = 0$的自变量x为泛复变量，未知函数也是泛复函数，则称解函数$U(x)$为它的**广域解**。原方程所对应的实方程组叫做**广域扩展方程**。

例 1 最简单的常微分方程

$$y'(x) = y(x) \tag{176}$$

如果令 $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$,

$y = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n$, 则在$S(e)$中有

$$dy_1e_1 + dy_2e_2 + \cdots + dy_ne_n$$

$$= (y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n)(dx_1e_1 + dx_2e_2 + \cdots dx_ne_n)$$

乘开右边对照两侧分量有

$$dy_\mu = \sum_{k\lambda=1}^{n} \gamma_{k\lambda}^{\mu} y_k dx_\lambda$$

又由 $dy_\mu = \frac{\partial y_\mu}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_\mu}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial y_\mu}{\partial x_n} dx_n$

得

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial x_\lambda} = \sum_{k=1}^{n} \gamma^\mu_{k\lambda} y_k \qquad (\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (177)$$

偏微分方程组（177）就是（176）的广域扩展方程组。它的解即可用$y = Ce^x$的分量得到。因为$y = Ce^x$就是（176）的广域解。用这种方法可求得一些现今方法无力得到的偏微分方程的解。

例2 非线性方程组

$$\begin{aligned} &U_x^2 + 2W_xV_x = U \\ &U_y^2 + 2W_yV_y = V \\ &U_z^2 + 2W_zV_z = W \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned} \qquad (178)$$

用上述方法可求得其特解为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4}(x + c_1)^2 + \frac{1}{2}(y + c_2)(z + c_3) \\ V &= \frac{1}{4}(z + c_3)^2 + \frac{1}{2}(x + c_1)(y + c_2) \\ W &= \frac{1}{4}(y + c_2)^2 + \frac{1}{2}(z + c_3)(x + c_1) \end{aligned} \qquad (179)$$

因为方程组（178）是下面方程在三次单位数N_1^3中的广域扩展方程组：

$$[f'(\eta)]^2 = f(\eta) \qquad (180)$$

其中 $\eta = x + ye + ze^2$，$f(\eta) = U + Ve + We^2$

总之，我们深入地研究本节中的广域扩展与上节的亚广

域扩展，定将推进各种微分方程的解法及性质的研究，上两例都是常微分方程的广域扩展，偏微分方程也可广域扩展，较为复杂从略。

下面考察一种常系数偏分方程组。它的各项的每一未知函数是微分阶数与次数均相同的。我们称之为**齐阶微分方程组**。如

例3 方程组

$$\begin{cases} U_{x^4}+U_{y^4}+U_{z^4}=0 & ① \\ U_{x^3}V_{x^3}+U_{y^3}U_{y^3}+U_{z^3}V_{z^3}=0 & ② \\ U_x^2V_x^2+U_y^2V_y^2+U_z^2U_z^2=0 & ③ \end{cases} \qquad (181)$$

例4 调和方程及三维保角映射方程

$$\begin{cases} U_{x^2}+U_{y^2}+U_{z^2}=0 & ① \\ U_xV_x+U_yV_y+U_zV_z=0 & ② \\ V_xW_x+V_yW_y+V_zW_z=0 & ③ \\ W_xU_x+W_yU_y+W_zU_z=0 & ④ \end{cases} \qquad (182)$$

对于m个自变量$x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，$n$个未知函数$U=(U_1, U_2, \cdots, U_n)$的齐阶（$\mu$阶）齐次（$\lambda$次）方程组（$\lambda$和$\mu$随方程而异）。

$$L^\lambda(D^\mu U)=0 \qquad (183)$$

我们可引入泛复变量$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_me_m$将它有相应导数的任意$n$个解析函数$U_1=U_1(x)$，$U_2=U_2(x)$，$\cdots$，$U_n=U_n(x)$代入方程组（183）则有

$$L^\lambda(D^\mu U)=L^\lambda(e^\mu U^{(\mu)})=U^{(\mu)}L^\lambda(e^\mu)=0$$

定义64 泛复变数的基$e=(e_1, e_2, \cdots, e_m)$，所满足的代数方程组

$$L^\lambda(e^\mu)=0 \qquad (184)$$

叫做（183）的**特征方程组**。

因此我们可有

定理50 若特征方程组（184）有泛复数解 e 则 $x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_me_m$ 的任意 n 个有相应导数的泛复函 $U_1(x)$，$U_2(x)$，…，$U_n(x)$ 即是(183) 的特征泛复函解。

推论1 U_i 的实分量是（183）广域扩展方程组的实解。

推论2 L 为线性算子时，U_i 的实分量是（183）的实解；这时(183)有实解的充分条件是（184）有泛复数解。

如例中，特征方程为

例 3：
$$\begin{cases} e_1^4+e_2^4+e_3^4=0 \\ e_1^6+e_2^6+e_3^6=0 \end{cases} \tag{185}$$

例 4：$e_1^2+e_2^2+e_3^2=0$

因此，对应的 $\eta=xe_1+ye_2+ze_3$ 的任意解析泛复函 U，V，W，是例 3、例 4 的特征泛复函解。但要注意，它们实分量是例 3、例 4 例中①的实解、而（181）的③式及（182）的②③④式无平凡实解。

猜测22 推论 2 中条件也是必要的.

研究课题32 对微分方程的广域扩展方程进行分类研究，并用其作为工具来研究微分方程的实解.

研究课题33 泛变复函数与积分方程的关系.

§45 边值问题的新提法

泛复数 $S(e)$ 所构成的泛复函的广义 $C—R$ 方程组

$$\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mi}^{k}\frac{\partial f_m}{\partial x_j}=\sum_{m=1}^{n}\gamma_{mj}^{k}\frac{\partial f_m}{\partial x_i} \tag{186}$$

$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

是混合了不同类型的一组方程。例如平面泛复函广义$C-R$方程组就包括椭圆、抛物、双曲型方程组

$$C: U_x = V_y \quad P: U_x = V_y \quad H: U_x = V_y$$
$$U_y = -V_x \quad U_y = 0 \quad U_y = V_x \qquad (187)$$

大家知道，对不同类型的方程，要以不同形式提出边值问题。迄今为止尚没有人提出某种统一的边界条件。但我们现在提出如下的一种不同于狄氏问题、柯西问题等其它经典形式的统一边界条件。这也就构成了一类新的统一边值问题。

设泛复数空间$S(e)$区域G内一段非拟零因子约当曲线C:

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \cdots,\ x_n = x_n(t). \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \qquad (188)$$

上.未知函数$U_1, U_2, \cdots, U_n$有值:

$$U_1 = U_1(t),\ U_2 = U_2(t),\ \cdots,\ U_n = U_n(t) \qquad (189)$$

其中x存在一阶导数U无穷可导。C上存在点$x(\xi)$，在其邻域内$x'(t) = x_1'(t)e_1 + x_2'(t)e_2 + \cdots + x_n'(t)e_n$非零及非零因子且$x(t)$非同类拟零因子集。

我们用泰勒级数确定一函数:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \cdots \qquad (190)$$

其中

$$f^{(k)}(x_0) = = V_1^{(k)}(\xi)e_1 + V_2^{(k)}(\xi)e_2 + \cdots + V_n^{(k)}(\xi)e_n$$
$$(k = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$
$$V_1^{(0)}(\xi) = U_1(\xi),\ V_2^{(0)}(\xi) = U_2(\xi), \cdots V_n^{(0)}(\xi) = U_n(\xi),$$

当$K>1$时$V_i^k(\xi)$，由下面递推关系确定：

$$f^{(k)}(x)=df^{(k-1)}(x)/dx$$

即有

$$\sum_{i=1}^{n}V_i^{k}(t)e_i=d\left[\sum_{i=1}^{n}V_i^{k-1}(t)e_i\right]/d\left[\sum_{i=1}^{n}x_i(t)e_i\right]$$

$$=\left[d\sum_{i=1}^{n}V_i^{k-1}(t)e_i/dt\right]/\left[d\sum_{i=1}^{n}x_i(t)e_i/dt\right] \qquad (191)$$

我们可得出如下结果：

定理51 泛复函（190）中的各分量满足方程组（186）且是在边界（188）上满足条件（189）的唯一可微解。

证明 由于$f(x)$是泰勒级数表达的泛复函所以它的各分量满足方程组（186）；又因它在非拟零因子的无穷集合（188）上有值（189），集合（188）在G有极限$x(\xi)$。根据唯一性定理可得$f(x)$是满足（186）、(189)唯一的泛复解析函数。

作为简例，我们对（187）中三个不同类型的方程提出如下的统一边界条件：

在平面复数$z=x+\omega y$的非拟零因子集即线段

$$z:\quad y=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \qquad (192)$$

上，$f(z)=u(x,y)+\omega v(x,y)$有值

$$u=e^{x},\quad v=0 \qquad (193)$$

取$\xi=0$，$z_0=0$由（191）不难求得：

$$f=(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=1$$

因之

$$f(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=e^{z} \qquad (194)$$

对（187）中不同的方程组，z值分别为

C: $z=x+iy$, P: $z=x+ky$, H: $z=x+jy$

将它们代入（194）并分蘖，则得方程组（187）满足条件（192）（193）的解分别是：

C: $u=e^x\cos y$　　$v=e^x\sin y$

P: $u=e^x$　　$v=e^xy$

H: $u=e^x\mathrm{ch}y$　　$v=e^x\mathrm{sh}y$

关于边值问题另一新的提法，是所谓的逆问题。传统边值问题是由边界条件求解。但在理论研究与技术实践中却遇到一种相反的问题，即从解的性质求边界条件。

例如在§48的电磁场中，为作出一个满足某种性质的奇异电磁场，必须先设计一种发射奇异电磁场的仪器，这就需要找出产生这种奇异电磁场的边界条件。

上述逆问题也是较为复杂的，它的深入研究将有助于边值问题的进一步发展。

研究课题34　其它形式方程的统一的边值问题。

研究课题35　各类方程边值问题逆问题具体的提法与结果。

§46　微分方程数值解的泛复函方法

偏微分方程离散的边值问题，利用差分方程可得到近似解。也可用其它方法得到各种近似解。这里我们利用泛复变函数的方法，可得到某些偏微分方程组离散边值问题的无穷多个精确解。

对于前面利用泛复函可解的偏微分方程组，大多含有任意的泛复解析函数。因此我们可用它的任意解组成一函数系来满足相应的边值要求。

例如对于线性齐次偏微分方程组（125）即

$$D_K^g(u)=0 \qquad (125)$$

变量$\eta=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$有相应阶导数的泛复函可构成它的特征泛复函解。$\eta$的幂函数$\eta_i(i=1, 2, 3\cdots)$的各实分量是它的实多项式解。设这些多项式是$p_k$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$对于方程（125）的离散边值问题，我们可构造满足边界条件的多项式φ。为此，令

$$\varphi=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\alpha_3p_3+\cdots+\alpha_mp_m$$

其中α为待定常数。

由于D_K^g是线性的，所以有

$$D_K^g(\varphi)=\sum_{n=1}^{m}\alpha_i[D_K^g(p_i)]=0$$

即φ满足方程组（125），另一方面把φ代入边界条件中来确定系数α

一般我们可得关于α的代数方程组。当M个边界条件在N个边界点上确定时，我们选取$m>MN$。从而未知量α的个数多于方程的个数，我们就可得无穷多组α。于是也就得到该边值问题无穷多个多项式解。

例1 双调和方程

$$\Delta^2u=u_{x^4}+2u_{x^2y^2}+u_{y^4}=0$$

特征方程 $1+2e^2+e^4=0$

变量 $z=x+ye$

完全的n阶整函数解有四个，即z^n的实分量

$$f(z)=z^n=P^n+Q^ne+R^ne^2+S^ne^3$$

可取 $\varphi=\sum_i \alpha_iP^i+\beta_iQ^i+\gamma_iR^i+\delta_iS^i$

根据边界条件确定α_i，β_i，γ_i，δ_i即可。

例2 拉普拉斯方程

$$u_{x^2} + u_{y^2} + u_{z^2} = 0$$

特征方程　$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0$

变量$\eta = xe_1 + ye_2 + ze_3$的幂函数$\eta^n$有$2n+1$个分量$u_1^n$、$u_2^n$、……$u_{2n+1}^n$因此可设

$$\varphi = \sum_i (\alpha_1^i u_1^i + \alpha_2^i u_2^i + \cdots + \alpha_{2i+1}^i u_{2i+1}^i)$$

确定α即可

例3　波动方程

$$u_{x^2} + u_{y^2} + u_{z^2} - a^2 u_{t^2} = 0$$

特征方程　$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - a^2 e_4^2 = 0$

变量　$\eta = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$的特征泛复函的$n$次幂函数有$(n+1)^2$个　因此可设

$$\varphi = \sum_{i} (\alpha_1^i u_1^i + \alpha_2^i u_2^i + \cdots + \alpha_{(i+1)^2}^i u_{(i+1)^2}^i)$$

由边值和初值确定α即可.

如果不用幂函数，而用其它函数如指数函数逼近边值问题也可以

例4　二维调和方程

$$u_{x^2} + u_{y^2} = 0$$

特征方程　$1 + i^2 = 0$

变量$z = x + iy$的指数函数e^{nz}有两个分量，因此我们可以设

$$\varphi = \sum_n (a_n e^{nx} \cos ny + b_n e^{nx} \sin ny)$$

再由边值确定a_n，b_n.

例5　弦振动方程

$$u_{x^2} - u_{t^2} = 0$$

特征方程　$1 - j^2 = 0$

变量$z=x+jt$的n阶指数函数也是两个分量，我们取

$$\varphi=\sum_{n}(a_n e^x \mathrm{ch}nt+b_n e^x \mathrm{sh}nt)$$

再用边值和初值来确定a_n和b_n。

如果取充分多的项，在离散的边值问题上，则可得到无穷多精确解。其它情况下可以得到一些满足精度的解。

上述方法与差分方法比较其优点是代数方程数目少；边界点可任取；满足方程的n阶整函数可先求得，并列表；在边界点的精度高等。但也有缺点，主要是总体误差情况不清，因此可以提出如下的课题：

研究课题36　各式方程用各类函数逼近边值问题的收敛判断与误差估计.

§47　麦克斯威方程组的解

描述电磁场规律的麦克斯威方程组，通常都用分离变量的方法求得周期形式的解。一般电磁场就利用傅立叶方法展开成单色波加以分析。本节给出一种具有任意泛复函的麦克斯威方程的解。

大家知道，一般电磁运动中用$A=(P,Q,R)$，表示电磁场的矢势，φ表示标势，C表示光速，则电磁场可用与麦克斯方程组等价的电磁势方程组（195）和洛伦兹规范（196）来描述：

$$P_{x^2}+P_{y^2}+P_{z^2}-\frac{1}{c^2}P_{t^2}=0$$

$$Q_{x^2}+Q_{y^2}+Q_{z^2}-\frac{1}{c^2}Q_{t^2}=0$$

$$
\begin{cases}
R_x{}^2+R_y{}^2+R_z{}^2-\dfrac{1}{c^2}R_t{}^2=0 \\
\varphi_x{}^2+\varphi_y{}^2+\varphi_Z{}^2-\dfrac{1}{c^2}\varphi_t{}^2=0
\end{cases}
\tag{195}
$$

$$
P_x+Q_y+R_Z+\frac{1}{c}\varphi_t=0 \tag{196}
$$

(195) 的特征方程是

$$
e_1^2+e_2^2+e_3^2-\frac{1}{c^2}e_4^2=0 \tag{197}
$$

取泛复变量

$$
\eta=xe_1+ye_2+ze_3+te_4 \tag{198}
$$

定理52 若$f(\eta)$、$g(\eta)$、$h(\eta)$和$\varphi(\eta)$是η的任意泛复解析函数，且满足

$$
f(\eta)e_1+g(\eta)e_2+h(\eta)e_3+\frac{1}{c}\varphi(\eta)e_4=0 \tag{199}
$$

则有

$$
P=f(\eta),\ Q=g(\eta),\ R=h(\eta),\ \varphi=\varphi(\eta), \tag{200}
$$

① 它们是 (195) 、 (196) 的泛复函解。

② 它们的对应实分量是 (195) 、 (196) 的实解。

证明 ①将 (200) 代入 (195) 、(196) 即得

②从定理50即得。

定义65 泛复变量η电磁场中起着重要作用，我们把η叫做解的生成元,或电磁场的生成元。函数$f(\eta)$, $g(\eta)$,$h(\eta)$, $\varphi(\eta)$叫做电磁场的生成函数。

对于符合条件 (197) 的泛复数一般是无限维的。它有 $(n+1)^2$个n阶整基。$e_1^k e_2^\lambda e_3^\mu e_4^\tau(k+\lambda+\mu+\tau=n)$ 因而它成为有限维泛复数时，仅是它的特殊地满足另外条件下的情

况。下面观察几个具体的特殊例子，

例 1　一般经典电磁波

设经典电磁波传播方向上单位矢量为$n=(n^1,n^2,n^3)$，ω为其频率。则我们可取特征方程（197）的实解：

$$e_1=\frac{\omega}{c}n^1,\ e_2=\frac{\omega}{c}n^2,\ e_3=\frac{\omega}{c}n^3,\ e_4=-\omega \tag{201}$$

电磁场的生成元为

$$\eta=\frac{\omega}{c}n^1x+\frac{\omega}{c}n^2y+\frac{\omega}{c}n^3z-\omega t=\frac{\omega}{c}(n\cdot r)-\omega t \tag{202}$$

生成函数取

$$\begin{aligned}&P=\alpha\cos\eta-\beta\sin\eta\\&Q=\gamma\cos\eta-\delta\sin\eta\\&R=-\frac{1}{n^3}[n^1(\alpha\cos\eta-\beta\sin\eta)+n^2(\gamma\cos\eta-\delta\sin\eta)\\&\varphi=0\end{aligned} \tag{203}$$

这即是真空中经典形式的一般电磁波

$$A=ReA_0e^{i(\frac{\omega}{c}n\cdot r-\omega t)}=ReA_0e^{i\eta} \tag{204}$$

因为复向量$A_0=(P_0^1+P_0^2i,\ Q_0^1+Q_0^2i,\ R_0^1+R_0^2i)$与$n=(n^1,\ n^2,\ n^3)$是正交的，即有

$$(n\cdot A_0)=0$$

从而

$$n^1P_0^1+n^2Q_0^1+n^3R_0^1=0$$

$$n^1P_0^2+n^2Q_0^2+n^3R_0^2=0$$

因此我们取　$P_0^1=\alpha$，$P_0^2=\beta$，$Q_0^1=\gamma$，$Q_0^2=\delta$。也就确定了R。两者是一致的。

例 2　实生成元所生成的非波动解

（197）中取　$e_1=1$，$e_2=2$，$e_3=-3$，$e_4=-\sqrt{14}c$。

生成元　$\eta = x + 2y - 3z - \sqrt{14}ct$

生成函数　$f(\eta) = \eta^2$，　$g(\eta) = \eta^3$，$h(\eta) = \dfrac{1}{3}(\eta^2 + 2\eta^3)$，

$\varphi(\eta) = 0$。

由关系　$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t},\ B = \nabla \times A \tag{205}$$

即可得E和B。它们在时间或空间上都不是波动的。

例 3　复生成元的解

(197) 中取　$e_1 = 1$，$e_2 = 2$，$e_3 = 2i$，$e_4 = c$

生成元　　$\eta = x + 2y + 2zi + ct$

生成函数　$f(\eta) = \sin\eta$，$g(\eta) = \cos\eta$，$\varphi = 0$，可定$h(\eta)$。

因此$A = (P, Q, R)$ 各分量有

$$P = \sin\eta = \mathrm{ch}2z\sin(x + 2y + ct) + i\,\mathrm{sh}2z\cos(x + 2y + ct)$$

$$Q = \cos\eta = \mathrm{ch}2z\cos(x + 2y + ct) - i\,\mathrm{sh}2z\sin(x + 2y + ct)$$

可样可得R。也可求得E和B。

例 4　四维生成元$R(i, j)$ 中的解

(197) 中取　$e_1 = i$，$e_2 = \sqrt{3}j$　$e_3 = ij$　$e_4 = -c$

生成元　　$\eta = xi + \sqrt{3}yj + zij - ct$

生成函数　$f(\eta) = e^\eta$，$g(\eta) = a$，$\varphi = 0$。

$h(\eta) = -je^\eta + \sqrt{3}ia$。

于是　$P = f(\eta) = e^\eta$

$$\begin{aligned}
&= e^{-ct}(\cos x\,\mathrm{ch}\sqrt{3}y\cos z - \sin x\,\mathrm{sh}\sqrt{3}y\sin z) \\
&+ ie^{-ct}(\cos x\,\mathrm{sh}\sqrt{3}y\sin z + \sin x\,\mathrm{ch}\sqrt{3}y\cos z) \\
&+ je^{-ct}(\cos x\,\mathrm{sh}\sqrt{3}y\cos z - \sin x\,\mathrm{ch}\sqrt{3}y\sin z) \\
&+ ije^{-ct}(\cos x\,\mathrm{ch}\sqrt{3}y\sin z + \sin x\,\mathrm{sh}\sqrt{3}y\cos z)
\end{aligned}$$

等等，A的各分量均有四个分簇。它每一对应分量均满足方程组（195）、（196），也可求出对应的E和B。这和直接

用泛复函解麦克斯威方程组结果也是一致的。

研究课题37　这种方法是否包括（195）（196）的全部实解？即任一实解是否一定是这种方法所得泛复函解的一分量.

§48　奇异电磁场

由上节例子看出，我们得到的麦克斯威方程的解(200)不但包括经典电磁波解作为它的特例，也包涵许多其它形式的非波动解，现在我们简略地分析一下其物理性质。因未经实验证明，现只能作为一种推理，以期引起百家争鸣和导致实验。

1　电磁场可以是各种形状的，一般可有全息性质；可以非周期性地向空间传播、扩散，即它的强度不一定在某方向上随空间或时间周期性地变化。

对于确定强度为$A_0=(P_0, Q_0, R_0)$的电磁势$A=(f, g, h)$，它在坐标为x，y，z，ct的空间是一类四维曲面（206）．这种曲面在$t=t_0$时的截面是三维的等势面，即在(206)中令$t=t_0$。

$$
\begin{aligned}
&f(xe_1+ye_2+ze_3+te_4)=P_0\\
&g(xe_1+ye_2+ze_3+te_4)=Q_0 \qquad (206)\\
&h(xe_1+ye_2+ze_3+te_4)=R_0
\end{aligned}
$$

这里$A_0=(P_0, Q_0, R_0)$是一种泛复形式的向量。如果A_0完全取实值时，则f，g，h可取某一分量与其对应，或将生成元取实值。

由于f，g，h的任意性，等势面将有着任意的形状．因此电磁场的形式是极广泛多样。当初边值在某空间区域内连续时，它将成一个体，将具有全息性。

定义66 电磁场等势面的法线方向叫做电磁场的**传播方向**；法线的矢线族构成与等势面正交的曲线族。我们称为“**光线**”；波印廷矢量S的方向叫做电磁场的**作用方向**。

因此，光线的方程为

$$\frac{dx}{f_x}=\frac{dy}{f_y}=\frac{dz}{f_z}=\frac{dct}{f_{ct}}$$

$$\frac{dx}{g_x}=\frac{dy}{g_y}=\frac{dz}{g_z}=\frac{dct}{g_{ct}} \qquad (207)$$

$$\frac{dx}{h_x}=\frac{dy}{h_y}=\frac{dz}{h_z}=\frac{dct}{h_{ct}}$$

2　电磁场的传播，当生成元是实数时，存在着确定的方向，这方向上速度是C，其它方向小于C；当生成元是其它形式泛复数时，在泛复空间中传播的方向是一直线，而在实空间中分成三束并不统一。

事实上，式（257）等价下面一个式子，即

$$\frac{dx}{e_1}=\frac{dy}{e_2}=\frac{dz}{e_3}=\frac{c^2dt}{e_4} \qquad (208)$$

这种“光线”当生成元为实数时，它与用E和B定义的经典光线是统一的。但当生成元非实数时，（207）的三式是不一样的。

定义67 电磁场沿线方向传播的速度称为**光线速度**。光线速度在坐标x，y，z方向的分量称为**相速度**。它们是：

$$x_t=\frac{e_1}{e_4}c^2,\quad y_t=\frac{e_2}{e_4}c^2,\quad z_t=\frac{e_3}{e_4}c^2. \qquad (209)$$

光线速度是：

$$(n \cdot r)_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2} = c$$

电磁场的实生成元为

$$\eta = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + ct$$

由（247）可知

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

光线是

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma} = cdt$$

例如上节的例 2 中，光线与相速度是

$$\frac{dx}{-1/\sqrt{14}} = \frac{dy}{-2/\sqrt{14}} = \frac{dz}{3/\sqrt{14}} = cdt.$$

$$x_t = -\frac{1}{\sqrt{14}}c, \quad y_t = -\frac{2}{\sqrt{14}}c, \quad z_t = \frac{3}{\sqrt{14}}c.$$

但光线速度仍为 C

3 电磁场的传播速度可以超过光速，也可以随时间和地点变化的.同一时间和地点各分量的传播速度可以有区别，在现实世界中，电磁场并不一定存在着一个固定速度为 c 的直线传播方向，即“光线”可以是各式各样的曲线。

当电磁场生成元不在实域时，它所生成的电磁场仍是实的，但它已是非经典解。这时，方向速度出现了异常。如上节的

例 2 中：$x_t = c$，$y_t = 2c$，$z_t = 2ic$

例 3 中：$x_t = -ic$，$y_t = -\sqrt{3}\,jc$，$z_t = -ijc$。

这些速度的物理意义是什么呢？首先，我们已经见到非实生成元形成电磁场传播速度可以大于或等于光速。其次我们来研究非实的速度。

我们观察上节例 2 中实部形成的电磁势：$A(P, Q,$

R)。有着不同的光线：

$$P: \quad dx = \frac{1}{2}dy = \frac{dz}{2\text{th}2ztg(x+2y+ct)} = cdt$$

$$Q: \quad dx = \frac{1}{2}dy = \frac{dz}{2\text{th}2z\text{ctg}(x+2y+ct)} = cdt$$

它们有着不同的各相速度和光线速度：

P：$x_t = c \quad y_t = 2c \quad z_t = 2c\text{th}2z\text{tg}(x+2y+ct)$

Q：$x_t = c \quad y_t = 2c \quad z_t = 2c\text{th}2z\text{ctg}(x+2y+ct)$

P：$(n\cdot r)_t = c\sqrt{5+4\text{th}^2 2z\text{tg}^2(x+2y+ct)} > c$

Q：$(n\cdot r)_t = c\sqrt{5+4\text{th}^2 2z\text{ctg}^2(x+2y+ct)} > c$

可知它们有的是随时间地点变化的。

对上节例 3 也可有类似的分析。从分析可知，当电磁场的生成元非实域时，电磁场不一定存在统一的确定的传播方向。由于解包含有任意泛复函，因此与等势面正交的曲线族，也即光线也就可以是任意曲线。

4 存在着共生的分蘖电磁场，它们在泛复空间中有着共同联系的“直线”传播方向。其物理机制尚需探索。也许是在不同的共生空间中的一种联系。

[illegible]上节例 2 有两个共生分蘖。例 3 有四个共生分蘖。如果说这些电磁场有一个不变的“直线”传播方向，那例 2 是复空间中两共生的实空间中确定的方向：

$$dx = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{2i} = cdt \tag{210}$$

例 3 电磁场传播方向是在椭圆双曲空间中，即在四个共生实空间中所确定的一条“直线”。

$$\frac{dx}{i} = \frac{dy}{\sqrt{3}j} = \frac{dz}{ij} = \frac{cdt}{-1} \tag{211}$$

这些共生的空间是不是存在的实体呢？这些“共生世界”的探索的确是很迷人的。

上述推论只是一些逻辑结果，现在尚没有实验验证，但我想这类实验是可以进行的。

牛顿曾经说过：“没有大胆的猜测就作不出伟大发现”这些结果的物理对应，我们有充分理由猜测它是存在的。

物理中的一些奇异现象，如基本粒子的磁场，天体的磁场，非视觉器官的图象识别，经络与气功的奇迹以及不明飞行物飞碟等现象，可能都和这些异常的电磁场有关系。因此探索这些电磁场的性质是一项很有趣味、很有价值的工作。

猜测23　非视觉器官图象识别的载体是奇异电磁场，人体和其它生物体存在着奇异电磁场的发射与接收器官，它可能就是经络系统。人体特异功能将物体移动是人体发射的奇异电磁场与物质奇异电磁场叠加后相互作用的结果。奇异电磁场的研究与应用将带来技术飞跃。

由于奇异电磁场性能多样，如它有穿透能力，因而人体发射与接受器官不必显露体表。移物是人体发射的和物体的奇异电磁场叠加成一新态，（线性方程的解可叠加）。移至另地后将人体场抽回，物体又呈原有状态。

法拉第也曾说过：“没有什么难以想象的事情是不能存在的，如果它是与自然规律相一致的话。”这里我们给出一种合理的推测

猜测24　存在着多种形式发展成度不同的电磁生物。

生物实质上是经过一定自然过程而产生的一种特殊物质。其主要特征是新陈代谢和能繁衍后代，有的还具有某些不同形式的自身意识等。从电磁场的性质，我们完全有理由相信，一种“电磁生物”是可能产生及进化的。这是因为：

电磁场可变，也可长期保持一些特性；每个电磁场均与其

它电磁场相互作用、相互影响；它具有组成任何复杂机制的物理性质；简单电磁场可组成复杂电磁场；它可感应和存储周围环境所给予的作用和信息；宇宙中产生电磁场的时间远比产生蛋白质的时间长久；作用于电磁场的因素比促使蛋白质生物进化的自然因素远为众多，等等。

这种电磁生物既然广泛存在宇宙中，哪人类为什么没有观测到呢？不，事实上人们早已察觉到它的存在，只是囿于偏见和无法解释，所以不被普遍接受而已。人们常常议论的飞碟的某些种类就可能是电磁生物的一种。

广袤无边的宇宙中，亿万年来可能多处发生如下过程：

最初一些长期稳定的电磁场相互作用，逐渐形成一些较大而复杂的个体胚芽。这些胚芽增大到一定程度，与周围环境相互作用更为强烈。出现了同化外界电磁场的机制。而有这种机制的电磁场又能更好地保存下来，进而产生了感受与反应机制，也即有生物意识了。只有那些具有自我保存和意识机制的电磁生物，才更有存在的可能。而具有增殖机制的，更有延续生存和进化的优越性。这种自然过程不断循环着。由于要适应和利用宇宙中极为复杂的环境和条件，因而电磁生物具有广泛的能力，这也更利于她的生存和发展。由于电磁场的四维对称性，它可能是一种四维生物，即可能占有时间这一度并在这一度上运动。

至于蛋白质生物与电磁生物间的关系，我们可以猜测前者是后者的中间宿主，是后者藉以发展的形式。因之人类发展方向，并不在于追求感官需求的物质无限地增长。而在于除了积累知识外，更重要的是发展人类自身的能力，即发展人类个体的物质与精神结构，发展自身的生物电磁场，使之日臻完美。

§ 49 粒子方程的泛复函解法

本节中我们用泛复函来解一下自由粒子的方程。可得知其过程较经典方法简便，而结果较经典方法丰富。我们采用的都是原有经典方程，这里只作一形式上的分析。本节的方法也可用来解其它方程。

一、薛定谔方程

$$\frac{\hbar}{2m_0}(\phi_{x^2}+\phi_{y^2}+\phi_{z^2})-\frac{1}{i}\phi_t=0 \tag{212}$$

引入泛复数$S(e)$中变量

$$\eta=te_0+xe_1+ye_2+ze_3 \tag{213}$$

将泛复变函数$\phi(\eta)$代入（212），得$\phi(\eta)$的常微分方程

$$\frac{\hbar}{2m_0}(e_1^2+e_2^2+e_3^2)\ddot{\phi}(\eta)-\frac{e_0}{i}\dot{\phi}(\eta)=0 \tag{214}$$

用一般方法即得

$$\phi(\eta)=C_1exp\frac{2m_0e_0}{ih(e_1^2+e_2^2+e_3^2)}\eta+C_2 \tag{215}$$

其中C_1，C_2是$S(e)$中的常数。

二、克莱因一哥登方程

$$\phi_{x^2}+\phi_{y^2}+\phi_{z^2}-\frac{1}{c^2}\phi_{t^2}-\frac{m_2c^2}{h}\phi=0 \tag{216}$$

同样将（213）的泛复函$\phi(\eta)$代入，得常微方程

$$(e_1^2+e_2^2+e_3^2-\frac{e^2}{c^2})\ddot{\phi}(\eta)-\frac{m^2c^2}{\hbar}\phi(\eta)=0 \tag{217}$$

简化为： $a^2\ddot{\phi}(\eta)-\mu^2\phi(\eta)=0$

解得

$$\phi(\eta)=C_1 exp\left(\frac{\mu}{a}\eta\right)+C_2\ exp\left(-\frac{\mu}{a}\eta\right) \tag{218}$$

其中 $\quad a^2=e_1^2+e_2^2+e_3^2-\dfrac{e_0^2}{c^2}$，$\mu=\dfrac{m_0c}{h}$，

C_1, C_2为$S(e)$中常数。

三、狄拉克方程

自由粒子的狄拉克方程为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\phi_t^1+\phi_z^3+\phi_x^4-i\phi_y^4 = \frac{m_0c}{i\hbar}\phi^1\\
&\frac{1}{c}\phi_t^2+\phi_x^3+i\phi_y^3-\phi_z^4 = \frac{m_0c}{i\hbar}\phi^2\\
&\phi_z^1+\phi_x^2-i\phi_y^2+\frac{1}{c}\phi_t^3=-\frac{m_0c}{i\hbar}\phi^3\\
&\phi_x^1+i\phi_y^1-\phi_z^2+\frac{1}{c}\phi_t^4=-\frac{m_0c}{i\hbar}\phi^4
\end{aligned} \tag{219}$$

引入泛复数$S(e)$中变量

$$\eta=cte_0+xe_1+ye_2+ze_3 \tag{220}$$

并将η的向量泛复函$\phi(\eta)=(\phi^1,\ \phi^2,\ \phi^3,\ \phi^4)^\tau$代入(219)即可得常微分方程组

$$\begin{aligned}
&e_0\dot\phi^1+e_3\dot\phi^3+(e_1-ie_2)\dot\phi^4=\lambda\phi^1\\
&e_0\dot\phi^2+(e_1+ie_2)\dot\phi^3-e_3\dot\phi^4=\lambda\phi^2\\
&e_3\dot\phi^1+(e_1+ie_2)\dot\phi^2+e_0\dot\phi^3=-\lambda\phi^3\\
&(e_1+ie_2)\dot\phi^1-e_3\dot\phi^2+e_0\dot\phi^4=-\lambda\phi^4
\end{aligned} \tag{221}$$

其中$\lambda=m_0c/i\hbar$。写成矩阵形式为

$$E\dot\phi=\lambda A\phi$$

即

$$\begin{pmatrix} e_0 & 0 & e_3 & (e_1-ie_2) \\ 0 & e_0 & (e_1+ie_2) & -e_3 \\ e_3 & (e_1-ie_2) & e_0 & 0 \\ (e_1+ie_2) & -e_3 & 0 & e_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}^1 \\ \dot{\phi}^2 \\ \dot{\phi}^3 \\ \dot{\phi}^4 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \\ \phi^4 \end{pmatrix}$$

情况一　当E的行列式$detE$不为零及零因子时，则有逆阵E^{-1}。不难求得

$$B = E^{-1}A = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} e_0 & 0 & e_3 & (e_1-ie_2) \\ 0 & e_0 & (e_1+ie_2) & -e_3 \\ -e_3 & (-e_1+je_2) & -e_0 & 0 \\ (-e_1-ie_2) & e_3 & 0 & -e_0 \end{pmatrix}$$

其中　$a^2 = e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2$. 方程（221）即化成

$$\dot{\phi} = \lambda B\phi \tag{222}$$

用通常的方法可求得解阵为

$$\phi(\eta) = (exp\lambda B\eta)C \tag{223}$$

其中C为$S(e)$中常数阵。由于

$$B^2 = I/a^2, B^3 = B/a^2, B^4 = I/a^4, \cdots\cdots$$

I是四阶单位阵。于是可得

$$\phi(\eta) = (exP\lambda B\eta)C$$

$$= \left[I + B\lambda\eta + \frac{I}{2!}\left(\frac{\lambda\eta}{a}\right)^2 + \frac{aB}{3!}\left(\frac{\lambda\eta}{a}\right)^3 + \cdots\cdots\right]C$$

$$= \left(I\,\mathrm{ch}\frac{\lambda\eta}{a} + aB_8\mathrm{h}\frac{\lambda\eta}{a}\right)C \tag{224}$$

情况二　当E行列式$detE=a^4=0$时，可得解不满足原方程，舍去。但当$detE=a^4$为零因子时，则要根据$S(e)$的具体情况讨论。可作一课题研究。

下面观察上述泛复函解的几个简例，我们将元基e_0，e_1，e_2，e_3取某些特殊实或复数时，可得一般情况下的经典解。

例1　薛定谔方程的解（215）中，如果令$C_1=L^{-\frac{3}{2}}$，$C_2=0$，$e_0=E=p^2/2m_0$，$e_1=-p_x$，$e_2=-p_y$，$e_3=-p_z$即得归一的完全波函数解

$$\phi=L^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-p\cdot r)}$$

例2　克莱因—哥登方程解（218）中，令

$C_1=C_2=1/\sqrt{2\omega_kV}$，$e_0=-i\omega_k$，$e_1=ik_x$，$e_2=ik_y$，$e_3=ik_z$则得到$K$—$G$方程的平面波解的完备集

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{V}}\ \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^{+(ik\cdot r-i\omega_kt)}$$

其中　$\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}=\mu^2=\omega_k^2-k^2$

例3　狄拉克方程的解阵（224）中，如果令

$$e_0=-i\frac{E}{c},\ e_1=ip_x,\ e_2=ip_y,\ e_3=ip_z$$

则有　$a=m_0c$。并可求得

$$\phi^1=\frac{1}{m_0c}[C_1(m_0c\alpha-\frac{e}{C}\beta)+C_3\beta p_z+C_4\beta(p_x-ip_y)]$$

$$\phi^2=\frac{1}{m_0c}[(m_0c\alpha-\frac{e}{C}\beta)+C_3\beta(p_x+ip_y)-C_4\beta p_z]$$

$$\psi^3=\frac{1}{m_0c}\left[-C_1\beta p_z-C_2(p_x-ip_y)\right]\beta+C_3\left(m_0c\alpha+\frac{e}{c}\beta\right)]$$

$$\psi^4=\frac{1}{m_0c}\left[-C_1(p_x+ip_y)\beta+C_2\beta p_z+C_4\left(m_0c\alpha+\frac{e}{c}\beta\right]\right.$$

其中

$$\alpha=\mathrm{ch}\frac{1}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)\quad \beta=i\,\mathrm{sh}\frac{1}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)$$

C_1，C_2，C_3，C_4 为复常数。如果在元基中去掉虚单位，即令$e_0=-\dfrac{E}{c}$等，则结果与此类似。但双曲函数变成了三角函数。

如果元基e取泛复数，上述方程的解就更为复杂新颖。但我们仍可得到实解。例如取椭圆抛物数 $R(i, k)$ 中的 e，即令

$$e_0=\frac{m_0c^2}{i\hbar},\ e_1=\alpha i\quad e_2=\beta k,\ e_3=\gamma ik$$

其中 $\alpha=\dfrac{\sqrt{2m_0c}}{\hbar}$，$\beta$，$\gamma$，为实数，则从（224）分蘖

$$\psi=\psi_1+\psi_2i+\psi_3k+\psi_4ik$$

可得

$$\psi_1=ae^{\alpha x}\cos\frac{m_0c^2}{\hbar}t+be^{\alpha x}\sin\frac{m_0c^2}{\hbar}t$$

等等。

当然我们取椭圆双曲数，n 阶微量数等等其它形式泛复数，上述方程的实解将极为丰富多彩。它们多呈共轭状态。但各种解的物理意义尚不清楚。

猜测25 基本粒子是一种稳定态的奇异电磁场，电磁场与基本粒子的逻辑关系类似于泛复解析函数与广义泛复解析函数的关系.

研究课题38 各种粒子方程的一些非经典解的性质与物理意义.

§50 四维时空的一种模型

本节是一种模型，模型是一种假设。因此这一节本身就是综合的猜测。当然，组成它的是许多小推测。其中有许多是被证实了的，但更多的却需要大家共同探索。

现实世界的时空究竟是怎样的？她象田野和鲜花一样真实，又象蜃楼和梦幻一样令人迷惑，她完全等同于我们感官的知觉吗？那为什么有的物质，如某些电磁场我们又没有感觉哩？因此探索时空与物质的真实状态，仍是人类的基本使命。

这里我们试图建立一种对称的四维时空模型。特殊情况下，它就是现今我们熟悉的物理空间；另外状态下，它又构成一些与之对称的时空。当然这里仅是一些数学逻辑推理或猜测。是否与现实吻合，尚需探索、实验。它可能是客观世界的一种特例，但却又是感觉世界的一种推广。

引进坐标 x_1，x_2，x_3，x_4 构成四度空间。我们不妨把它叫做空间X，空间X中存在着物质，这种物质是用一"密度"向量 $\rho=(\rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^4)$ 来描绘的，其中 $\rho^i=\rho^i(x_1, x_2, x_3, x_4)$。$X$世界的事物实质就是密度$\rho$所描绘的一幅静止的图画。这种密度在空间$X$中是"静止"的，但在其扩空间中是变化的。

我们观察世界，是从不同的角度进行的。为了使事物的样子不随坐标选取而改变，我们必须建立一种量度，即建立

距离的概念。

定义68　X空间两点x^0与x间的距离为δ，

$$\delta=[(x_1^0-x_1)^2+(x_2^0-x_2)^2+(x_3^0-x_3)^2+(x_4^0-x_4)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{225}$$

写成微分的形式，则是

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2 \tag{226}$$

猜测26　空间X中的距离δ应作为与坐标系选择无关的一个不变量.

作为理性空间上述猜测本可作为一种规定，但X既要描述现实空间，那只能作为一种推测。

空间X中保距线性变换即距离不变的线性变换可写成：

$$\begin{aligned}
x_1'&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+b_1\\
x_2'&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4+b_2\\
x_3'&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4+b_3\\
x_4'&=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4+b_4
\end{aligned} \tag{227}$$

用矩阵表示为

$$X'=AX+B$$

将（227）微分，再由距离不变的要求

$dx_1'^2+dx_2'^2+dx_3'^2+dx_4'^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2$ 得自由项 b 能取任意实数。而a要满足下式

$$a_{1\lambda}^2+a_{2\lambda}^2+a_{3\lambda}^2+a_{4\lambda}^2=1$$

$$a_{1\lambda}a_{1\sigma}+a_{2\lambda}a_{2\sigma}+a_{3\lambda}a_{3\sigma}+a_{4\lambda}a_{4\sigma}=0 \quad (\lambda\neq\sigma) \tag{228}$$

$$(\lambda,\ \sigma=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

（228）式只有10个约束的等式，但参数$a_{\mu\lambda}$有11个，因此较易满足。

例如洛伦兹变换就是（228）的特例。只要设$x_4=ict$，

及

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$$

即可，易知A的元素满足（228）。在洛伦兹变换下，原来全对称的世界变成了在第四度上的偏移，这种偏移由于$x_4=ict$造成不妨称为椭圆世界，有趣的是椭圆世界的力学倒是双曲力学。

猜测27 椭圆世界是我们现今所感知、认识的世界，而描写物质的密度ρ就是通常的电磁势A。

上述猜测基于现有的电磁势方程（195），如果将它变回原四维状态，即令$x_4=ict$，$A^4=S=-i\varphi$可以看到这种物质方程多么和谐！设

$$A=(P, Q, R, S)$$

则 $$\square^2 A=A_{x_1^2}+A_{x_2^2}+A_{x_3^2}+A_{x_4^2}=0$$

$$\square A=P_{x_1}+Q_{x_2}+R_{x_3}+S_{x_4}=0 \qquad (229)$$

这是否标志着我们这个世界应该是由电磁场组成的呢？物质是否可能是一种凝聚的电磁场呢？万有引力场只是它的二级效应呢？

在$x_4=ict$的变换下，相对性力学的哈密尔顿雅可比方程也变得非常整齐：

$$S_{x_1}^2+S_{x_2}^2+S_{x_3}^2+S_{x_4}^2+m^2C^2=0 \tag{230}$$

既然椭圆虚单位 i 可以有许多平行的泛复数虚单位，那么除了我们感知的现实“椭圆世界”所对应的变换 $x_4=ict$外，当然也可能存在$x_4=kct$的“抛物世界”，$x_4=jct$的“双曲世界”等等。对一般的情况下变换 $x_4=ect$，其中 e 可采用任意泛复数的基。也可能构成各式的新时空。

猜测28　一般时空是均衡的空间，在某种机制下，会产生时空变换$x=ect$，然后由对应的感觉构成一种时空.

另一方面，在（x_1，x_2，x_3，x_4）均衡状态下，x_4可进行变换，其它各度也同样可进行变换。一个粒子进行了变换$x_4=ict$，它就表现为（x_1，x_2，x_3）中的粒子，x_4上表现为时间。如果进行变换 $x_1=ict$，它将表现为椭圆空间（x_2，x_3，x_4）中的粒子，而在x_1上表现为时间。

由于距离 $ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2$的不变性，上述变换，如$x_1=ict$，则表现为

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=-c^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_4}{dt}\right)^2 \tag{231}$$

某些情况下，如经典电磁波时，将有 $ds/dt=0$，这时粒子速度表现为光速。这种速度是在空间（x_2，x_3，x_4）中表现的。

当然，四维距离ds的物理意义究竟是什么？变换 $x=ect$ 的物理机制又是什么？现在尚不清楚。但我深信，随着人类认识的不断深化这些奥妙的东西将逐步被人们所了解。

猜测29　（231）中的 $\frac{ds}{dt}$ 是粒子质量的一种标志。

习 题 九

1 方程$y'+y=0$在双曲数中进行亚广域扩展与广域扩展后，其扩展方程组形状分别是什么。

2 方程 $p(y)q(x)y'=r(y)s(x)$，在抛物数中广域扩展方程是什么？自设具体的 p、q、r、s 并试解这一方程组。

3 方程$U_x=U_y$在椭圆数中亚广域扩展与广域扩展方程组是什么？

4 方程$y'+x=0$在一般泛复数$S(e)$中广域扩展方程组是什么？试求这组方程的解.

5 试求椭圆抛物变量$\eta=x^2+y^2i+z^2k+t^2ik$的解析函数$f(\eta)$所能满足的广义$C—R$方程组.

6 求变量$S=(x^2+y^2)+(x^2-y^2)i+2xyi$的解析函数$f(S)$所满足的广义$C—R$方程组以及它形成的与路径无关的积分.

7 求一般情况的泛复数$S(e)$中的变量

$$\eta=x_1^2e_1+x_2^2e_2+\cdots+x_n^2e_n$$

的解析函数$f(\eta)$所满足的广义$C—R$方程组.

8 求方程的$U_x^2{}^2+U_y^2{}^2=2U_x{}^2U_y{}^2$的特征泛复函解. 这种解的分量应满足一组什么样的方程组？

9 试求方程组

$$U_x-V_y=0$$

$$U_y+V_x=0$$

在线段$y=0$，$0\leqslant x\leqslant 1$上满足边值条件

$$U=x^2-x,\ V=0$$

的解.

10 试求方程组

$$P_x=Q_y=R_z$$

$$P_z=Q_x=R_y$$

$$P_y = Q_x = R_z$$

在线段 $x = y = 0 \quad -1 \leqslant z \leqslant 1$ 上满足边值条件

$$P = 0, \ Q = z^2 \quad R = 0$$

的解.

11 试求满足下面波动方程的前9个多项式：

$$U_{t^2} = U_{x^2} + U_{y^2}$$

12 试写出满足下面方程组的全部线性无关的二次多项式。

$$U_x + U_y + U_z = 0$$

$$U_{x^2} + U_{y^2} + U_{z^2} = 0$$

13 试在特征方程（197）中取

$$e_1 = e_2 = 1 \quad e_3 = 0 \quad e_3 = \sqrt{2c}$$

则电磁场的生成元η是什么 形 状？如 果 生成 函 数 $P = \eta$，$Q = \eta^2$，$R = 0$ 则 是φ什么？E 和B各分量是什么？

14 试在特征方程（197）中取双曲数H中的数

$$e_1 = e_2 = e_3 = j, \ e_4 = \sqrt{8c}$$

则电磁场的生成元应是 什么？如 果 取生成函数 $P = \eta$，$Q = \eta \quad R = e^{\eta}$，则φ应是什么？

15 写出13和14题中的光线方程.

16 分析13和14题中电磁场的各相速度和光线速度.

17 试用引进一新变量，即令$m^2c^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial x_5}\right)^2$ 的方法，求哈密尔顿—雅可比方程的泛复函解.

18 在薛定谔方程的泛复函解（215）中，令

$$e_1 = e_2 = e_3 = 1, \ e_0 = j, \ \partial_1 = 1, \ \partial_2 = 0$$

试导出它的复解.

19 在克莱因—哥登方程的泛复函解（218）中令 $e_1 = e_2 = e_3 = 1$，$e_0 = ic$，$c_1 = c_2 = 1$，求ψ的实解.

附录　赋范空间与巴拿赫代数

定义　线性空间E中每个元素a均有一个实数$\|a\|$和它对应，且满足

① $\|a\| \geqslant 0$，尚且仅当$a=0$时，$\|a\|=0$。

② $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$，$(\lambda \in C)$

③ $\|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$

则称E为线性赋范空间。$\|a\|$称为a的范数。

对线性赋范空间E中可以定义两点间的距离

$$\rho(a, b) = \|a-b\|$$

用它可以构成距离空间。

线性空间E是完备的，是指E中元素列$\|a_n - a_m\| \to 0$ $(m, n \to \infty)$ 则a_n收敛。也就是存在$a \in E$，当$n \to \infty$时。$\|a_n - a\| \to 0$。

完备的线性赋范空间叫做巴拿赫空间。

定义：一个巴拿赫空间E如果定义了乘法$ab \in E$，且还满足

④ $\|ab\| \leqslant \|a\| \|b\|$

则把E叫做巴拿赫代数。

巴拿赫代数中条件④实质保证了这种代数系统的元素对乘法保持连续。即

$$\|(a+\varepsilon_1)(b+\varepsilon_2)\| \leqslant \|ab\| + \|\varepsilon_2 a\| + \|\varepsilon_1 b\| + \|\varepsilon_1 \varepsilon_2\| = \|ab\| + \varepsilon$$

许多例子可参看泛函分析书。

习 题 答 案

习 题 一

1. ① $1+4j$ ② $1+8k$

③ $62+63j$ ④ $\frac{2}{3}+\frac{11}{9}k$

⑤ $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}j$ ⑥ $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(3+j)$

2. 在C中 $z=0$，$z=\pm 1$，$z=\pm i$

在P中 $z=0$，$z=\pm 1$，$z=\lambda k$.

在H中 $z=0$，$z=\pm 1$，$z=\pm j$.

3. $\frac{\alpha-\beta\omega}{\alpha^2\oplus\beta^2}$

4. ① 在C、P、H中皆是上半平面（不含实轴）

② 在C中是两直线$y=\pm x$，在P中是虚轴，在H中为原点.

6. 在C中是一个圆 $x^2+y^2=5^2$，

在P中是两条平行线 $x=\pm 5$，

在H中是两组双曲线 $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{5^2}=\pm 1$.

7. $\pm\sqrt{\alpha}\,(1+\frac{\beta}{2\alpha}k)$.

8. 在C中为6

在P中为10

在H中为14

12 ① $13e^{i\theta}=13(\cos\theta+i\sin\theta)$, $\theta=\mathrm{arctg}\frac{5}{12}$.

② $e^{3k}=1+3k$.

③ $8e^{j\theta}=8(\mathrm{ch}\theta-j\mathrm{sh}\theta)$, $\theta=\mathrm{arth}\frac{3}{5}$.

④ C: $\sqrt{5}\,e^{i\theta}=\sqrt{5}\,(\cos\theta+i\sin\theta)$, $\theta=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$.

P: $2e^{\frac{k}{2}}=2(1+\frac{k}{2})$.

H: $\sqrt{3}\,e^{j\theta}=\sqrt{3}\,(\mathrm{ch}\theta+j\mathrm{sh}\theta)$, $\theta=\mathrm{arth}\frac{1}{2}$.

14. ① $1+2k$

② $2\sqrt[3]{18}(\mathrm{ch}\frac{1}{3}\mathrm{arth}\frac{5}{13}-j\mathrm{sh}\frac{1}{3}\mathrm{arth}\frac{5}{13})$

17. z在三种平面都表示一个圆：$x^2+y^2=1$

W在C表示一个圆 $u^2+v^2=1$.

在P中表示一个椭圆 $(2u-1)^2+v^2=1$.

在H中表示一条线段 $u=1$, $-1\leqslant v\leqslant 1$.

20.
$$\mathrm{ch}n\theta=C_n^0\mathrm{ch}^n\theta+C_n^2\mathrm{ch}^{n-2}\theta\,\mathrm{sh}^2\theta+C_n^4\mathrm{ch}^{n-4}\theta\,\mathrm{sh}^4\theta+\cdots+\begin{cases}C_n^n\mathrm{sh}^n\theta & n\text{为偶数}\\ C_n^{n-1}\mathrm{ch}\theta\,\mathrm{sh}^{n-1}\theta & n\text{为奇数}\end{cases}$$

$$\mathrm{sh}n\theta=C_n^1\mathrm{ch}^{n-1}\theta\,\mathrm{sh}\theta+C_n^3\mathrm{ch}^{n-3}\theta\,\mathrm{sh}^3\theta+C_n^5\mathrm{ch}^{n-5}\theta\,\mathrm{sh}^5\theta+\cdots\cdots+\begin{cases}C_n^{n-1}\mathrm{ch}\,\theta\,\mathrm{sh}^{n-1}\theta & n\text{为偶数}\\ C_n^n\mathrm{sh}^n\theta & n\text{为奇数}\end{cases}$$

习　题　二

1. ① $(\alpha^2+2\beta\gamma)+(\gamma^2+2\alpha\beta)e+(\beta^2+2\alpha\gamma)e^2$

　② $\frac{1}{2}(1-e+e^2)$

　③ $\sqrt[3]{2}$

　④ $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(1+e+e^2)$

2. $z=0$，$z=1$，$z=e$，$z=e^2$。

4. C：1，i，e，e^2，ie，ie^2

　P：1，k，e，e^2，ke，ke^2

　H：1，j，e，e^2，je，je^2

5. ① $2+j-ij$　　② $-2i+2k-2ik$

　③ $8i+10ij$　　④ $\frac{1}{2}(1-i-k-ik)$

6. $x=\pm 1$，$x=\pm i$，$x=\pm j$，$x=\pm ij$

　$x=\frac{1}{2}[\pm(1+i)\pm j(1-i)]$，$x=\frac{1}{2}[\pm(i-1)\pm j(1+i)]$，

7. $\sqrt{\alpha+\beta i+\gamma k+\delta ik}=P+Qi+Rk+Sik$

其中，$P=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}$　$Q=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}$

　$R=\pm\frac{\gamma P+\delta Q}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$　　$S=\pm\frac{\delta P-\gamma Q}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

13. ① $4(e^3+e^2+e)$　　② $3e^2+1$

习　题　三

1. 元素形状为 $a=\alpha+\beta e+\gamma e^2+\delta e^3$（$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\delta$为实数）

　逆元　$a^{-1}=\frac{\Delta_1}{\Delta}+\frac{\Delta_2}{\Delta}e+\frac{\Delta_3}{\Delta}e^2+\frac{\Delta_4}{\Delta}e^3$

共轭元 $\bar{a} = \Delta_1 + \Delta_2 e + \Delta_3 e^2 + \Delta_4 e^3$

其中
$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \gamma & \beta \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \gamma & \beta & \alpha & \delta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

Δ_i （$i = 1$，2，3，4）分别为Δ的第一行元素的代数余子式。

3． 标准正交基为

$$\omega_1 = -\frac{i}{4}(e-i)(e^2-1)$$

$$\omega_2 = \frac{i}{4}(e+i)(e^2-1)$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{4}(e^2+1)(e-1)$$

$$\omega_4 = \frac{1}{4}(e^2+1)(e+1)$$

4． ① $2+6e+5e^2-3e^3-10e^4$ ② e^4

5． ① $8(1+e^{\frac{n}{2}})$ ② $\begin{cases} 1-e+e^2-\cdots\cdots-e^{n-1} & n\text{为偶数} \\ 1-e+e^2-\cdots\cdots+e^{n-1} & n\text{为奇数} \end{cases}$

6． C、P中为0，1

H中为0，1，$\frac{1}{2}(1+j)$，$\frac{1}{2}(1-j)$

N_1^4中为0，1及$\frac{1}{2}(1\pm e^2)$。

7． 标准正交基为

$$\omega_1 = \frac{1}{6}(e-1)(e-2)$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2}(e+1)(e-2)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{3}(e+1)(e-1)$$

习 题 四

2 ① $(ax-cz)e_1^2+(bx-cz)e_2^2+(ay+bx)e_1e_2$
$+(az+cx)e_1e_3+(cy+bz)e_2e_3$

② $(x^3-3xz^2-z^3)e_1^3+(y^3-3yz^2)e_2^3+6xyze_1e_2e_3$
$+3x(y^2-z^2)e_1e_2^2+3y(x^2-z^2)e_1^2e_2+3x^2ze_1^2e_3+3y^2ze_2^2e_3$

3. $(x^2+\dfrac{t^2}{\alpha^2})e_1^2+(y^2+\dfrac{t^2}{\alpha^2})e_2^2+(z^2+\dfrac{t^2}{\alpha^2})e_3^2+2xye_1e_2$
$+2xze_1e_3+2xte_1e_4+2yze_2e_3+2yte_2e_4+2zte_3e_4$

4. n阶整基的数目有$2n+1$个

5. 一阶：e_1，e_2，e_3，e_4
二阶：e_1e_2，e_1e_3，e_1e_4，e_2e_3，e_2e_4，e_3e_4，e_2^2，e_3^2，e_4^2.
三阶：$e_1e_2^2$，$e_1e_3^2$，$e_1e_4^2$，$e_2e_3^2$，$e_2e_4^2$，$e_3e_4^2$，$e_2^2e_3$，
$e_2^2e_4$，$e_3^2e_4$，$e_1e_2e_3$，$e_1e_2e_4$，$e_1e_3e_4$，$e_2e_3e_4$

6. 一阶整基有二个，$n\geqslant 2$时，n阶整基有三个.

7. 整基形状为$e_1^qe_2^re_3^s$
其中$0\leqslant q\leqslant 4$，$0\leqslant s\leqslant 3$，r为非负整数.

8. 在C中，$\gamma_{12}^1=\gamma_{21}^1=\gamma_{11}^2=\gamma_{22}^2=0$　$\gamma_{11}^1=\gamma_{12}^2=\gamma_{21}^2=1$
$\gamma_{22}^1=-1$
在P中　$\gamma_{11}^2=\gamma_{12}^1=\gamma_{21}^1=\gamma_{22}^1=\gamma_{22}^2=0$，
$\gamma_{11}^1=\gamma_{12}^2=\gamma_{21}^2=1$
在H中　$\gamma_{11}^2=\gamma_{12}^1=\gamma_{21}^1=\gamma_{22}^2=0$，
$\gamma_{11}^1=\gamma_{12}^2=\gamma_{21}^2=\gamma_{22}^1=1$

14. ① 5　　　② -6

习 题 五

1. $f_1=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　$f_2=3(\alpha^2\beta+\gamma\beta^2)$，$f_3=3(\alpha\beta^2+\gamma\alpha^2)$

2. $q(x)=i(1+j)x^2-(i+j+ij)x+(1+i+ij)$

$\gamma(x)=-i+j-ij$

3. $\alpha+\beta+\gamma\neq1$及$\alpha-1$，β，γ不同时相等

4. 0，$\zeta\omega+\xi\omega^2$　(ζ，$\xi\in R$)

5. $2n+1$个线性无关的n次二维波动多项式.

6. $x_i^m e_i$及$e^{xpx_i}e_i$，$i=1$，2，…，n.

9. 在n阶正交数中

$$ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x_i^k e_i$$

10. $-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^n\frac{1}{x}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{5^{n+1}}$　　$3<\|x\|<5$

11. $E_1(x,y)=e^x$　　$E_2(x,y)=e^x(e^y-1)$

14. $\sin(x+ky)=\sin x+ky\cos x$

$\cos(x+jy)=\cos x\cos y-j\sin x\sin y$

15. $\mathrm{sh}(x+iy)=\mathrm{sh}x\cos y+i\mathrm{ch}x\sin y$

$\mathrm{ch}(x+ky)=\mathrm{ch}x+ky\,\mathrm{sh}x$

16. $\cos\alpha-(\beta\sin\alpha)e-(\gamma\sin\alpha+\frac{\beta^2}{2}\cos\alpha)e^2$

17. $\arcsin(x+ky)=\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}k$

$\mathrm{arth}(x+ky)=\mathrm{arth}x+\frac{y}{1-x^2}k$

18. $Ln(1+i)=ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2n\pi)$

$Ln(1+j)=ln\|1+j\|+j\,\mathrm{arth}1$

$Ln(1+k)=k$

19. $\sqrt{\alpha+\beta j+\gamma k+\delta ik}=P+Qj+Rk+Sjk$

其中　$P=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta})$，$Q=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta})$，

$$R=\frac{\alpha(P\gamma+Q\delta)-\beta(Q\gamma+P\delta)}{2(\alpha^2-\beta^2)},\quad S=\frac{\alpha(Q\gamma+P\delta)-(P\gamma+Q\delta)}{2(\alpha^2-\beta^2)}$$

习 题 六

1. $2abu-(a^2+b^2)v=0$，直线.

2. $u=x^3+3xy^2 \qquad v=3x^2y+y^3$，

5. ① $-\frac{2}{3}$ ② $e^{1+j}-1=(e\text{ch}1-1)+je\text{sh}1$

6. ① 原函数实部为 $\sin x$ 虚部为 $y\cos x$

   积分的实部为$\int \cos x dx$，虚部为$\int(-y\sin x)dx+\cos x dy$

   ② 原函数实部为$\text{ch}x\text{ch}y$虚部为$\text{sh}x\text{sh}y$

   积分的实部为$\int \text{sh}x\text{ch}y dx+\text{ch}x\text{sh}y dy$

   虚部为$\int \text{ch}x\text{sh}y dx+\text{sh}x\text{ch}y dy$

8. ① $\frac{1}{4}(1-e-e^2)$ ② 0

12. ① $-\frac{1}{3}(2+i)$ ② $-\text{sh}2i$

20. $f(z)$的根集为$Z=\{z=\alpha+\beta j \mid \alpha+\beta=2,\ \alpha,\ \beta\in R\}$

    $g(z)$以$1-z$ 为原模的准根集为

    $Z=\{z=\alpha+\beta j \mid \alpha+\beta=0,\ \alpha,\ \beta\in R\}$

21. $(2+\lambda)+(1-\lambda)e-e^2$及$(2+\mu)+(1+\mu)e-(1-\mu)e^2$

    $\lambda,\ \mu\in R$.

22. $1+a(1+j)$ 其中 $a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}\lambda^n$

23. $Z=z=\{\alpha+\beta k \mid \alpha=2n\pi\pm\frac{\pi}{2},\beta$ 为任意非零实数，$n=\pm1$

    $\pm2,\ \cdots\cdots\}$

习 题 七

1. $$\begin{cases} u_x - v_y = 4\alpha u - 4\beta v \\ v_x + u_y = 4\beta u + 4\alpha v \end{cases}$$

其中 $\alpha = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ $\quad\beta = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

2. $$\begin{cases} v_y = 2v \\ u_x - u_y = (\alpha - \beta)u - \alpha v \end{cases}$$

其中 $\alpha = \cos(x + y)$ $\quad\beta = e^{x+y}$

4. $$\begin{cases} u_x - v_y = u - \dfrac{2}{y}v \\ v_x - u_y = 0 \end{cases}$$

其中 $w = u + jv \quad w^{*1} = w,\ w^{*2} = u - jv$

5. $a = \dfrac{F_{\bar{z}}G^{*2} - F^{*2}G_{\bar{z}}}{FG^{*2} - F^{*2}G}$ $\quad b = -\dfrac{F_{\bar{y}}G - FG_z}{FG^{*2} - F^{*2}G}$

$A = \dfrac{F_zG - FG_z}{FG^{*2} - F^{*2}G}$ $\quad B = -\dfrac{F_zG^{*2} - F^{*2}G_z}{FG^{*2} - F^{*2}G}$

7. $$\begin{cases} u_x = v_y + 2u_t \\ u_y = -v_x + 2u_t \end{cases}$$

8. $$(R - Q)_\zeta + (Q - P)_\eta + (P - R)_\xi = 0$$
$$(P - R)_\zeta + (R - Q)_\eta + (Q - P)_\xi = 0$$
$$(Q - P)_\zeta + (P - R)_\eta + (R - Q)_\xi = 0$$

11. ① $-\dfrac{1}{4}$ $\quad$ ② 0

14. $\dfrac{5}{6}(1 + e + e^2)$

习 题 八

5. $v=(v^1,\ v^2,\ v^3)$

其中 $v^1=\xi^3+\eta^3+\zeta^3-3(\xi^2\zeta+\eta^2\xi+\zeta^2\eta)+6\xi\eta\zeta$

$v^2=3[\xi^2(\zeta-\eta)+\eta^2(\xi-\zeta)+\zeta^2(\eta-\xi)]$

$v^3=3(\xi^2\eta+\eta^2\zeta+\zeta^2\xi)-(\xi^3+\eta^3+\zeta^3+6\xi\eta\zeta)$

$f(x)-x^3=(\xi+\eta e+\zeta e^2)^3$

6. 流函数

$$\psi=\frac{1}{2}(2\xi^2-\zeta^2-\eta^2)+(2\eta\zeta-\xi\eta-\xi\zeta)+\frac{1}{2}(2\xi-\eta-\zeta)$$

势函数 $\phi=(\zeta-\eta)[2\xi-(\eta+\zeta)+1]$

7. $v=(v^1,\ v^2,\ v^3)$

其中

$$v^1=3x^2-3z^2$$

$$v^2=0$$

$$v^3=-6zx$$

$$f(\eta)=(x^3-3z^2x)e_1^3+\cdots\cdots$$

9. 广义C—R方程组为

$$\begin{cases}P_x=Q_y\\P_y=-S_x\\R_x=S_y\\R_y=Q_x\end{cases}$$

11. 独立n阶多项式解的个数为$2n+1$

14. 四阶方程为

$$W_{y^4}+10W_{y^3x}+21W_{x^2y^2}+16W_{x^3y}+5W_{x^4}=0$$

一阶方程组为

$$\begin{cases}P_y+5S_x=0\\Q_y-P_x+16S_x=0\\R_y-Q_x+21S_x=0\\S_y-R_x+10S_x=0\end{cases}$$

其中P、Q、R、S是由示性方程 $e^4+10e^3+21e^2+16e+5=0$所确定的解析函数的分量.

15. $$u_i=u_i(x+ye),\quad v_i=v_i(x+ye)$$

其中，$i=1, 2, 3$；$(1+e^2)^2=0$.

16. $P_x=Q_y$，$Q_x=R_y$，$R_x=S_y$，$S_x=T_y$，$T_x=P_y$.

习　题　九

1. 亚广域扩展：$y=u+jv$.

$$u'+u=0,\quad v'+v=0$$

广域扩展：$y=u+jv$，$x=\zeta+j\xi$.

$$u_\zeta+u=0,\quad u_\xi+v=0,\quad v_\zeta+v=0,\quad v_\xi+u=0$$

2. 令　$x=\zeta+\xi k$，$y=u+vk$，$p=p_1(u,v)+kp_2(u,v)$

$q=q_1(\zeta,\xi)+kq_2(\zeta,\xi)$，$r=r_1(u,v)+kr_2(u,v)$，

$s=s_1(\zeta,\xi)+ks_2(\zeta,\xi)$

则　$p_1q_1u_\zeta=r_1s_1$，$u_\xi=0$，$p_1q_1v_\xi=r_1s_1$

$(p_1q_2+p_2q_1)u_\zeta+p_1q_1v_\zeta=r_1s_2+r_2s_1$

由 $$\int\frac{p(y)}{r(y)}dy=\int\frac{s(x)}{q(x)}dx$$ 可解

3 亚广域扩展，$u=P+Qi$：$P_x=P_y$，$Q_x=Q_y$.

广域扩展. $u=P+Qi$，$x=\alpha+\beta i$，$y=\gamma+\delta i$.

$P_\alpha=P_\gamma=Q_\beta=Q_\delta$，$P_\beta=P_\delta=-Q_\alpha=-Q_\gamma$.

4. 令 $$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n,$$
$$y=y^1e_1+y^2e_2+\cdots+y^ne_n.$$

得 $$y^k_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}\gamma^k_{ij}x_i=0$$

$$y^k=-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\gamma^k_{ij}x_ix_j.$$

5. $$f(\eta)=P+Qi+Rk+Sik$$
$$P_x/x=Q_y/y=R_z/z=S_t/t$$

$$Q_x/x = -P_y/y = S_z/z = -R_t/t$$

$$R_x/x = S_y/y, \quad P_z = Q_t = 0$$

$$S_x/x = -R_y/y, \quad Q_z = P_t = 0$$

6. $$f(\zeta) = P + Qi + Rj + Sij$$

$$yP_x + yQ_x + xR_x = xP_y - xQ_y + yR_y$$

$$-yP_x + yQ_x + xS_x = xP_y + xQ_y + yS_y$$

$$xP_x + yR_x + yS_x = yP_y + xR_y - xS_y$$

$$xQ_x - yR_x + yS_x = yQ_y + xR_y + xS_y$$

$$\int (P + Qi + Ri + Sij)d[(x^2 + y^2) + (x^2 - y^2)i + 2xyj]$$

7. $$f(\eta) = f^1 e_1 + f^2 e_2 + \cdots + f^n e_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk}^{m} f_{x}^{k}{}_{i}/x_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}^{m} f_{x}^{k}{}_{j}/x_j$$

$$(i, j, m = 1, 2, \cdots, n)$$

8. $f(\eta) = f(x + ye) = P + Qe + Re^2 + Se^3$, $(1 - e^2)^2 = 0$.

$P_x = Q_y$, $2S_x + Q_x = R_y$, $R_x = S_y$, $-S_x = P_y$.

9. C: $u = x^2 - y^2 - x$

P: $u = x^2 - x$ $\qquad v = 2xy - y$

H: $u = x^2 + y^2 - x$

10. $P = x^2 + 2yz$, $Q = z^2 + 2xy$, $R = y^2 + 2xz$.

11. a, x, y, t, $x^2 + t^2$, $y^2 - x^2$, xy, yt, tx.

12. $x^2 - y^2 - 2xz + 2yz$; $2xy - 2xz - y^2 + z^2$.

13. $\eta = x + y + \sqrt{2}\,ct$, $\quad \varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \eta^2)$

$$E = (-\sqrt{2}, \ -2\sqrt{2}(x + y) - 4ct, \ 0)$$

$$B = (0, \ 0, \ 2x + 2y + 2\sqrt{2}\,ct - 1)$$

14. $$\eta = \sqrt{3}\,ct + j(x + y + z)$$

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}(2\eta + e^{\eta})j$$

15. ⑬ $z = a$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}ct$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}ct$;

⑭ $dx = dy = dz = \frac{jc}{\sqrt{3}}dt$ 或于实空间中仅对第三分量有光线：

$$dx = dy = dz = \frac{th(x+y+z)}{\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}ct}}\,dct.$$

16. ⑬ $x_t = y_t = \frac{c}{\sqrt{2}}$, $z_t = 0$; $(n \cdot r)_t = c$

⑭ $x_t = y_t = z_t = \frac{j}{\sqrt{3}}c$ 或于实空间中仅对第三分量有R有.

$$x_t = y_t = z_t = \frac{th(x+y+z)}{\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}ct}}\,c.$$

17. $S = S(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5)$

其中 $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2 = 0$, $\frac{\partial s}{\partial x_5} = \pm mc$

18. $$\psi(\eta) = exp\alpha[ijt + i(x+y+z)]$$
$$= (\cos\alpha t + ij\sin\alpha t)[\cos\alpha(x+y+z) + i\sin\alpha(x+y+z)]$$

其中 $$\alpha = -\frac{2m_0}{3\hbar}$$

19. $\psi_1 = 2\cos\frac{\mu}{2}ctch\frac{\mu}{2}(x+y+z)$

$\psi_2 = 2\sin\frac{\mu}{2}ctsh\frac{\mu}{2}(x+y+z)$

其中 $\mu = \frac{m_0c}{\hbar}$.

参 考 文 献

Bers, L.

1. Theory of Pseudo-Analytik Functions, New York University. 1953. (闻国椿译，准解析函数论，科学出版社出版，1964.)

Begehr, H.and Cildert, R. P.

2. Randwertaufgaben Ganzzahliger Charakteristrik fur Verallgemeinerte Hyperanalytische Functionen, Appl. Anal. 6(1977), 189—205.

3. On Riemann Boundary Value Problems for Certain Linear Elliptic Systems in the Plane, Jour Diff. Equations, V. 32, No. 1979. 1—14.

Боярс ний, Б. В.

4. Annales Polonici Mathematici X VII 3(1966), 281—320.

5. Д. А. Н. 122 1958. 543—546

Ба лабаев В. Е.

6. Об одной С стеме Уравнений в Кватернионах в Четырех Мер о Комп е с ом Пространстве, Матем. Заметки, 1978, 23, №1, 41—46.

陈国钧

7. 非正统复数，潜科学，1982

Douglis, A.

8. A Function-theoretic Approach to Elliptic Systems of Equations in Two Variables, Com. Pure. Appl. Math. V. 6 (1953), 259—289.

Deavours C. A.

9. The Quaternion Calculus, Amer. Math. Month. 1973, 80, No. 6.

丁有杰

10. 广域空间的正交化，通化师院学报，1985，1，36—38.

11. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. Academic Press, New York, 1974.

12. Nonlinear Boundary Value Problems for Elliptic Systems in the Plane in Proc. Inter. conf. on Non-linear Systems Application, (1976).

Cilbert, R. P. aud Hile, C.

13. Generalized Hypercomplex function theory, Trans. Amer. Math. Soc. V. 195, 1974, 1—29.

14. Hypercomplex Fuuction Theory in the Sense of L Bers, Math. Nachr. 72 (1976), 187—200.

Cilbert, R. P. and Weublaud, W.

15. Analytic, Generalized, Hyperanalytic Function Theory and an Application to Elasticity. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 73 A, 317—331, 1975.

Гуревич, Б. Л.

16. Новые Типы Пространств Основных и Обобщенных Функций и Проблема Коши для Операторных Уравнений, Диссертеация Харьков, 1956.

Гельфанд, И. М. и Шапиро, З. Я.

17. Однородные Функций и Их Приложения Успехи Матем. Наук, 10 1955, №3, 3—70.

华罗庚，吴兹潜，林伟

18. 二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组，科学出版社（1979）.

侯宗义

19. 广义超解析函数论的一个积分算子，科学通报，V 28, №. 22（1983）.

20. 超复函数论的非线性边值问题的求解方法，应用数学与计算数学，1984，3，86—88.

胡传淦

21. 向量值解析函数的进展及其在向量值奇异积分方程中的应用，全国广义解析函数与边值问题会议报告（1979）

Hile, C.

22. Elliptic Systems in The Plane with Finst Order Terms and constant Coefficients, Comm. in PDE, 3（1978）.

姜涛

23. 一类常微分方程组的泛复变函数解法，通化师院学报，1986，1.

李忠　闻国椿

24. 一阶线性椭圆型偏微分方程的哥西公式，数学学报，V. 14, No. 1，1964，23—32.

李武明

25. 圆锥复数的一些性质，通化师院学报，1985，1，42—48.

刘洪秋

26. 空间流场的泛复函表示初探，通化师院学报，1986，1.

Meisil, C. C. aud Th′eodoresco, N.

27. Fonction Homorphes Cans l′espace Mathematica. 5，142—159，1931.

马龙军

28. 偏微分方程离散的数值边值问题的多解性，通化师院学报，1985，1.

濮德潜

29 关于变复变函数（I），兰州大学学报，1962.

30. 重复变函数（上），数学研究与评论，4（1983）

秦元勋

31. 时空理论（II），新物理探索，第五集，1977，4.

覃国光

32. 科学探索学报，1982，3，123—136.

Rosenfeld, B. A. and Yaglom, I. M.

33. On The Geometries of The Simplest a Algebras, Mat. Sb. 28：205—216，1951.

Sudbery, A.

34. Quaternionic Analysis, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.,1979，85，№2.

吴学谋

35. 武汉大学学报，3（1978），1（1979）.

36. 模糊数学，1（1981），1（1984）.

37. 应用数学和力学，1，3，（1980），1，5，6

(1984)

38 逼近转化论与数学中的泛系概念，湖南科技出版社。

Викуа, И. Н.

39. Обобщенные Аналитические Функций, Москва, 1959.（广义解析函数，人民教育出版社，1960.）

Wendland, W.

40. Elliptic Systems in The Plane, Pieman London, 1979.

黄列德

41. 空间一阶椭圆型偏微分方程组及其边值问题，同济大学，1981.

肖荫庵和熊锡金

42. 一类四元数函数和 Maxwell 方程，东北师大学报 4 (1983)

熊锡金

43. 泛复变函数 (I)(续)，武汉大学学报，1 (1980), 26—39, 4 (1981), 31—38.

44. 一类混合型线性偏微分方程组在L. Bers 意义上广义解，科学通报，V. 25, № 19, 1980, 870—872.

45. 真空中电磁场的一些形式，东北师大学报，1981. 1, 21.

46. Maxwell方程的一类解，应用数学和力学，V. 2, № 5, 1981, 549—555.

47. 泛系逻辑，泛复变函数与奇异电磁场。科学探索学报。V. 2, № 2, 1982, 6, 115—116.

48. 粒子方程的泛复变函数解法，通化师院学报，

1985，1，17—23.

49．微分方程的泛复函数论方法初探，通化师院学报1985，1，24—32.

50．唯一性定理与一类新型边值问题．科学探索学报．1985，3．

51．奇异电磁场与一些自然之谜，通化师院学报，1986，1，7—11

52．力学系统与时空结构的一些模式，通化师院学报，1986，1，12—20.

Yaglom，I. M.

53．A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis, Springer-Verlag, New-York, Inc, 1979.（陈光还译，九种平面几何，上海科技出版社出版，1985.）

54．Geometric Transformations I—III. New Math. Library, Volumes 8(1962), 21(1968), 24(1973), Randon House, New York

55．Complex Numbers in Geometry, Academic New York, 1968.

阎英骥

56．一类三维推广域中的曲面积分，通化师院学报，1985，1，33—55.

57．抛物复变函数，延边大学学报，1984，1．

58．P空间的拓扑性质，通化师院学报1986，1，27—34.

59．含抛物参数函数的积分，通化师院学报，1986，1，43—48.

朱静航

60．关于Capelli多演函数，吉林师大学报，1,(1963)．

61．一类四元数多演函数的奇异积分，全国奇异积分方程与边值问题会议报告（1965）．

62．调和多演函数及其映射，吉林师大学报，1，（1959）

63．一类四元数多演函数，吉林师大学报，1（1980）

周连第

64．一阶椭圆型偏微分方程组的函数理论，数学进展．3（1964）．

张利

65．实域与复域上的三维广域扩张分类．通化师院学报，1985，1，49—53．

66．广域关于其理想的剩余类环结构，通化师院学报，1986，1，39—42

后　　记

许多实验物理学家今天同样对接受在理论物理学家的语言中愈来愈流行的很深奥的数学感到犹豫不安。

——杨振宁

这本书是想把作者窥见的繁花似锦的世界一角的影象敬献在大家面前。为了让更多的人能欣赏这幅图景，我力求使它不需要艰深的预备知识，而只对泛复函作最基本的概述，现今许多杰出的工作未能包括在内。文献中许多深刻的结果，读者可自行阅读。

复变函数对科学的巨大作用已众所周知，作为复函推广的泛复变函数就很可能给专业人员增添一种新工具，使之在解决某些问题时更为方便。因此请大家原谅，这里就没追求那种纯粹数学的过分严谨。因而也就摆脱了那种令人犹豫不安的深奥的数学语言。

所谓人类对某一问题"求解"，即是将未知事物由已知某些性质的东西表达出来，如三次代数方程的解用根式表达，二维调和方程的解由复变解析函数表达等等。因而，人类已知的东西越多，材料就越丰富，用以表达未知事物的方式就更加多彩，道路就更为宽广。泛复变函数也试图在人类知识大厦中增添一种材料，随时可以备用。

当然，每个人都可以根据自己的爱好和需要来选读有关章节。例如：对代数不感兴趣的读者可越过第一章；而对复函较熟悉的数理工作者如需要掌握一些内容作为工具，那么

只要选择各章中的典型例子看看就可以了。

希尔伯特曾指出，只要一门科学分支能提出大量问题，它就充满了生命力，这本书还写进了由于种种原因作者所未完成的猜测和一些课题，这些可能引起读者的研究兴趣。

这本书只是在一片广袤无垠的沃土上引进了一点种子，而各种新苗的培育，期待着大家的耕耘。我深信，这些果木定会在关心它成长的人们手中出现许多珍贵多彩的品系，获得丰硕甜蜜的果实。

人类对自然之神所赋予数的运算的认识是从加减乘除开始的。而实数和复数在这些运算上的演化就已使人类建成了现在光怪陆离的科学世界。作者深信，书中所引入的更为广泛的具有原始运算加减乘除性质的泛复数，定将在人向“神”过渡的历程中扮演着一个重要的角色。

一百年后的人们啊！您也许感到这些在您中学时代教科书中的内容太幼稚了吧。但请原谅，自然之子的人类现在还是处于蒙昧时期。我们就是这样艰难地沿着布满荆棘的小路蹒跚地一步一步走向光明与希望的哟！

朱静航老师的教诲，吴学谋先生的指导，肖荫庵、汤正权、姜涛、李龙景、马龙军、李武明、阎英纪、丁有杰、曲波、林昆志、刘洪秋、张利等同事有益的讨论，使这本书许多章节增添了光彩。其中有的结果也是他们得到的。特别是马龙军同志做了大量工作，习题答案也由他做出，

钱伟长、路见可、齐民友、武单群、黄启昌、闻国椿、李毓昌、张海权等老师在我的成长中给予了长辈的关心和扶植，在此一并致以谢意。

作　者

1986年1月于通化师院

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□=□□□
□□=205
SS□=10236986
DX□=
□□□□=1988□04□□1□
□□□=□□□□□□□□□

20 □□□□□□□□□
21 □□□□□□
22 □□□□□□(Ⅰ)
23 □□
24 □□□□□□(Ⅱ)
□□□
25 □□□□□
26 □□□□□□□□
27 □□□n□□□
28 □□□□□□□□□□
29 □□□□□□□□□□□
□□□
30 □□□□□□□□□□□
31 □□□□□□□□□
32 □□□□□□□□□□□□□
33 □□□□□□□□□
34 □□□□□
□□□
□□□ □□
35 □□□□□□□
36 □□□□□□□□□
37 □□□□□□□□□□□
38 □□□□□□□□□□
39 □□□□□□□□□□□□□□□
40 □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□
41 □□□□□□□□□□□
42 □□□□□□
43 □□□□□□□□□□□□(Ⅰ)
44 □□□□□□□□□□□□(Ⅱ)

45

46

47

48

49

50